Problemas Tema 1

Preliminares

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Responde razonadamente las siguientes cuestiones:

(a) Si a es racional y b es irracional, ¿es $a+b$ necesariamente irracional? ¿Y si a y b son irracionales?

(b) Si a es racional y b es irracional, ¿es ab necesariamente irracional?

(c) ¿Existe algún número a tal que a^2 sea irracional pero a^4 racional?

(d) ¿Existen dos números irracionales tales que tanto su suma como su producto sean racionales?

2. Razona si son ciertas las siguientes afirmaciones:

(a) $|x| < 5$ implica $x < 5$.

(b) $x < 5$ implica $|x| < 5$.

(c) $|x-5| < 2$ si y sólo si $3 < x < 7$.

(d) $|1+3x| \leq 1$ implica $x \geq \frac{-2}{3}$.

(e) No existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-1| = |x-2|$.

(f) $\forall x > 0,\ \exists y > 0$ tal que $|2x+y| = 5$.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones

(a) $|2x-3| = 7$

(b) $|x| = 5$

(c) $|x-3| = -3$

(d) $|x+8| = 0$

(e) $|2x+3| = -9$

(f) $|x+3| = 5+x$

(g) $2|x| + |x-1| = 4$

(h) $|2x-3| - 2|x| = 3$

4. Resuelve las siguientes inecuaciones:

(a) $|5x+2| > 0$,

(b) $2|3-x| - 10 \geq 0$,

(c) $|x-3| \leq 2x-5$

(d) $|x| + 3 \geq 2x$

(e) $|x-1| + |x+1| < 4$

(f) $|x-2| + 3|x| \leq 6$

5. Determina los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon\ \dfrac{x-1}{x-2} > 0,\ x > -1\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \colon\ 4x < 6x+2,\ -3x \geq -1\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \colon\ \dfrac{3x+6}{x-1} > 0\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \colon\ x^2 - 5x + 6 > 0\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{R} \colon\ x^2 - 6x + 8 \leq 0\}$

6. Demuestra por inducción:

(a) $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) $1^m+2^m+\cdots+n^m\leq n^{m+1},\ m\in\mathbb{N}$

(c) $4^n>n^2$

(d) $(1+x)^n\geq 1+nx\,,\ x>-1.$

7. Halla el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos, indicando si hay máximo o mínimo:

(a) $\{x\in\mathbb{Q}\colon 0\leq x\leq\sqrt{2}\}$

(b) $\{x\in\mathbb{Z}\colon 0\leq x\leq\sqrt{2}\}$

(c) $\{x\in\mathbb{R}\colon x^2+x+1\geq 0\}$

(d) $\{x\in\mathbb{R}\colon x^2+x+1<0\}$

8. Halla el supremo y el ínfimo de los conjuntos del problema 5, indicando si tienen máximo o mínimo.

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

9. Demuestra que existen dos números irracionales $x,y\in\mathbb{R}$ tales que x^y es racional. Indicación: Considera el caso $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones

(a) $|1-3x|+x=-3$

(b) $3|x+4|-2=x$

(c) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=2$

(d) $2|2-x|+|2x-1|=x$

(e) $|3-2x|-3|x+2|=x$

(f) $|x-4|-\left|\dfrac{x-1}{5}\right|=4-x$

(g) $\dfrac{|x|}{2}+3x+4=|x-1|$

(h) $|4-x|+|2x-5|>7-x$

(i) $|x-6|+|x|<4$

(j) $4|x-2|+3|x|\geq 6$

(k) $3|x-4|-|2x|<x-6$

(l) $x^3-x^2-5x-3\leq 0$

(m) $x^3-3x^2+3x-1\geq 0$

(n) $x^2-2x+4\geq 3$

11. Demuestra las siguientes expresiones para $n\in\mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a-a^{n+1}}{1-a},\ a\neq 1$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

(e) $\displaystyle(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k},\ x,y\in\mathbb{R}$

12. Demuestra por inducción las desigualdades

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2})+1\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq 2\sqrt{n}-1$$

13. Determina el supremo y el ínfimo del conjunto $\{x\in\mathbb{Q}:x|x-2|<2x-3\}$.

Problemas Tema 2

Continuidad de funciones reales

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones

(a) $\sqrt[4]{(2x-15)^4} = 10$
(b) $\sqrt{(3-2x)^2} + x = 3$
(c) $2\sqrt[4]{(5-4x)^4} = x+2$
(d) $2|3x-1| = \sqrt{(x-7)^2}$
(e) $\sqrt[4]{(x+1)^4} - 3|x-2| = 6$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones:

(a) $\sqrt[6]{(2x+1)^6} > 3$
(b) $2^{x^2} \geq 4^{x+1}$
(c) $x^2 < \sqrt[3]{1-x^3}$

3. Indica el dominio de las siguientes funciones:

(a) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$
(b) $\sqrt{1-x}$
(c) $\sqrt{\dfrac{1-x}{2-x}}$
(d) $\log(x^2-4)$
(e) $\log(\log x)$
(f) $\operatorname{sen}\sqrt{2x-1}$
(g) $\log(\operatorname{sen} x)$
(h) $\sqrt{\dfrac{1-|x|}{2-|x|}}$
(i) $\log\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}$

4. Estudia si son pares o impares las siguientes funciones:

(a) $f(x) = |x+1| - |x-1|$
(b) $f(x) = a^x + a^{-x}$
(c) $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$
(d) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$

5. Calcula $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1} y g^{-1}, determinando sus dominios respectivos, para las funciones

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \qquad g(x) = x^2 + 5x.$$

6. Halla la inversa de las siguientes funciones y determina su dominio:

(a) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
(b) $f(x) = \dfrac{2^x}{1+2^x}$
(c) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

7. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x}{x^3-5}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$ (e) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8-\sqrt[3]{x}}{2+x}$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-\sqrt{4x^2-5x}$ (f) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-3x+2}{2x^3+2x^2-10x+6}$

8. Estudia la existencia de los siguientes límites, y calcúlalos cuando existan:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{10x+x\sqrt{x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

(c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{|x|}{x^2+x}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+1}-x)$

(e) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{|x|}{x}}$

(g) $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

9. Demuestra las siguientes equivalencias para $x\to0$:

(a) $\log(1+x)\sim x$ (b) $a^x-1\sim x\log a$ (c) $e^x-1\sim x$.

10. Prueba que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$. Usa esta igualdad para calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x-\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}}$ (d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{x}$

11. Prueba que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\log(1+x)}{x}=1$. Usa esta igualdad para calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$ (b) $\lim\limits_{x\to0}(e^x+x)^{1/x}$ (c) $\lim\limits_{x\to0}(\cos ax)^{1/x^2}$

12. Demuestra las siguientes equivalencias para $x\to+\infty$:

(a) $\log(e^x-1)\sim x$

(b) $\log(e^{-x}+x^4)\sim 4\log x$

(c) $\log(x^3+2x^2-x+4)\sim 3\log x$.

13. Estudia la existencia del $\lim \dfrac{x+1}{|x-1|}$ cuando x tiende a $1^+, 1^-, 1, +\infty, -\infty$.

14. Estudia la continuidad de las funciones

(a) $f(x)=\begin{cases} 2, & x=0 \\ \dfrac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}, & x\neq0 \end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}}, & x\neq0 \end{cases}$

(c) $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$

15. Demuestra que las ecuaciones siguientes tienen al menos una raíz real:

(a) $x - \operatorname{sen} x = 1$

(b) $e^x + \operatorname{sen} x = 0$

(c) $\arctan x + e^x = 14$

(d) $x^{179} + \frac{163}{1+x^2+\operatorname{sen}^2 x} = 119$

16. La función $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ cumple que $f(1) = 2$ y $f(-1) = -2$. ¿Existe algún punto $x \in [-1, 1]$ en el que $f(x) = 0$? ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

17. Resuelve las siguientes inecuaciones:

(a) $\sqrt{\left(\dfrac{2x}{5} + 1\right)^2} - x < 2$

(b) $|x| - 2\sqrt{(6-x)^2} \geq x$

(c) $x^2 < \sqrt{1 - x^2}$

(d) $2 \log \sqrt{x} - \log(1 - x) = 2$

(e) $\sqrt{(x-3)^2} + |4 - 5x| > 7$

18. Indica el dominio de las siguientes funciones:

(a) $\sqrt{\log \dfrac{x-1}{x+1}}$

(b) $\sqrt{\log \dfrac{5x - x^2}{4}}$

(c) $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$

(d) $f(x) = \sqrt{1 - \log \sqrt{1 - \log x}}$

(e) $\sqrt{\dfrac{9-x^2}{x+2}}$

19. Sabiendo que el dominio de la función f es $[0, 1]$, hallar el dominio de las funciones:

(a) $f(x^2)$ (b) $f(\operatorname{sen} x)$ (c) $f(x - 5)$ (d) $f(2x + 3)$ (e) $f(\operatorname{tg} x)$

20. Prueba que:

(a) Si $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ entonces $(f \circ f \circ f)(x) = x$.

(b) Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$, entonces $f \circ g \neq g \circ f$.

21. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1} - mx$

(c) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{2 - \sqrt[3]{x}}{8 - x}$

(d) $\lim\limits_{x \to 1} x^2(x-1) \operatorname{sen} \frac{1}{1-x}$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - x)^{1/x^2}$

22. Estudia la existencia de los siguientes límites, y calcúlalos cuando existan:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2 + \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}$

(c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$

(d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$

23. Calcula $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$.

24. Sean f y g dos funciones reales de una variable real.

(a) Si en un punto no existe el límite de f ni de g, ¿puede existir el límite de $f+g$ o de fg?

(b) Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$, ¿debe existir $\lim_{x\to a} g(x)$? ¿Y si en lugar de suma es producto?

(c) Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y no existe $\lim_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$?

25. Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; define $f\circ g$ y $g\circ f$, y estudia la continuidad de $f,\ g,\ f\circ g,\ g\circ f$ en los casos:

(a) $f(x)=1-x,\ \ g(x)=x^2+5x$.

(b) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x>0\\ 0, & \text{si } x\leq 0\end{cases},\ \ g(x)=\begin{cases}|x-\frac{1}{2}|, & \text{si } x\in[0,1]\\ 3, & \text{si } x\notin[0,1]\end{cases}.$

26. La función $f(x)=[x]$ se denomina parte entera de x; $f(x)=n$ si $n\in\mathbb{Z}$ es tal que $n\leq x<n+1$. Estudia la continuidad de las funciones $f(x)=[x]$, $g(x)=x[x]$ y $h(x)=[\operatorname{sen} x]$.

27. Demuestra que la ecuación

(a) $x2^x=1$ tiene al menos una solución positiva no mayor que 1

(b) $\pi-2x-2\operatorname{sen} x=0$ posee una solución en $[0,\frac{\pi}{2}]$

(c) $x\operatorname{sen} x=\frac{\pi}{4}$ posee al menos dos soluciones en $[0,\pi]$

28. Dado $a\in(0,\frac{1}{2})$, prueba que la ecuación $x2^x+a=0$ tiene al menos dos soluciones negativas, una menor y otra mayor que -1.

29. Sea $F:[0,1]\to[0,1]$ continua. Demuestra que existe $c\in[0,1]$ tal que $F(c)=c$ (c se llama *punto fijo* de F).

30. Prueba que la ecuación $\cos x=\dfrac{x}{1+\log^2(1+x)}$ tiene al menos una solución en $(0,+\infty)$.

31. ¿Tiene solución en $[-2,2]$ la ecuación $\dfrac{x^3}{4}-\operatorname{sen}\pi x+3=\dfrac{3}{2}$?

32. Prueba que en cualquier instante, existen dos puntos antipodales sobre el ecuador de la tierra que tienen la misma temperatura.

33. Sea f una función continua en un intervalo I y sean $x_1,\ldots x_n\in I$. Prueba que existe $c\in I$ tal que

$$f(c)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

Un coche recorre 100 kilómetros en 50 minutos. Prueba que hubo un minuto en el que recorrió 2 km.

Problemas Tema 3

Cálculo Diferencial

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplificando si es posible:

(a) $\dfrac{2x}{1-x^2}$

(b) $\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$

(c) $x+\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}$

(d) $\left(\dfrac{x+x^2}{1+x^2}\right)^{1/3}$

(e) $x\sqrt{1-x^2}$

(f) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

(g) $\operatorname{sen}^2(2x+1)^{3/2}$

(h) $(2-\cos^2 x)^3$

(i) $\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x+\sqrt{x}}$

(j) $\dfrac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}$

(k) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

(l) $\operatorname{sen}(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})$

(m) $\operatorname{sen}(\cos^2 x)$

(n) $\operatorname{tg}(\sqrt{x}+x)$

(o) $x^2\cos(1/x)$

(p) $\operatorname{sen}^2\sqrt{x}$

(q) $\dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x}$

(r) $e^{\sqrt{x}}$

(s) $\log(\operatorname{sen} x)$

2. Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de la función en el punto dado:

(a) $f(x)=x^3-x$, $x=2$ (b) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x=5$ (c) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x=1$

3. Determina a y b reales para que la recta $2x-y=0$ sea tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2+ax+b$ en el punto $(2,4)$.

4. Calcula las derivadas (si existen) de las siguientes funciones:

(a) $f(x)=x|x|$, $x\in\mathbb{R}$

(b) $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$

(c) $f(x)=[x]\operatorname{sen}^2(\pi x)$, $x\in\mathbb{R}$

(d) $f(x)=(x-[x])\operatorname{sen}^2(\pi x)$, $x\in\mathbb{R}$

(e) $f(x)=\log|x|$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(f) $f(x)=\arccos\dfrac{1}{|x|}$, $|x|>1$

5. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones en sus dominios:

(a) $f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x\geq 0\\ x^3, & x<0\end{cases}$ (b) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 0\\ x, & x>0\end{cases}$ (c) $f(x)=1-|x^3|$

6. Calcula a, b, c y d para que las siguientes funciones sean diferenciables:

(a) $f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 - 2x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{si } x \leq 0 \\ cx^2 + dx, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

7. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones, calculando las derivadas cuando existan ($a, b, p \in \mathbb{R}$):

(a) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$

(b) $f(x) = \log|x|$

(c) $f(x) = \begin{cases} |x|^p, & x \neq 0; \\ a, & x = 0. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1; \\ ax + b, & x < 1. \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0; \\ 1 + x^2, & x \leq 0. \end{cases}$

8. Se considera la función $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.

(a) Determina el dominio de f, Y Estudia la continuidad de f en él.

(b) Estudia la derivabilidad de f en su dominio, calculando f' allá donde exista.

9. Calcula las derivadas de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$, y comprueba la regla de la cadena en los casos:

(a) $f(x) = 1 - x \operatorname{sen} x$, $g(x) = 1 - x$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \operatorname{sen} x$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$, $g(x) = \dfrac{x}{1 + x}$

10. Usando una aproximación lineal adecuada, estima los siguientes números, y compara el resultado con el obtenido en la calculadora.

(a) $\sqrt[3]{25}$ (b) $\sqrt{103}$ (c) $\operatorname{sen} 32^\circ$ (d) $\sqrt{80}$

11. El resultado de la medición del radio de una bola es de 10 cm, con un error de $\pm 0,1$ cm. Determina el error máximo del volumen calculado. ¿Con qué precisión debemos medir el radio de una bola para que el error cometido en el cálculo del volumen no supere $\pm 0,1$ cm^3?

12. El radio de una semiesfera se calcula a través de su volumen, dando éste un valor de 1 cm^3, con una precisión del $99,9\%$. ¿Cuál es la precisión para el cálculo del radio correspondiente?

13. Determina y' mediante derivación implícita, en el punto indicado, así como las rectas tangente y normal a la curva en dicho punto. Determina también los puntos de las gráficas anteriores donde la tangente es horizontal.

(a) $x^2 - y^2 = 1$; $(-2, \sqrt{3})$

(b) $xy = 1$; $(3, 1/3)$

(c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$; $(1/4, 1/4)$

(d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$; $(2, 2)$

(e) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$; $(\cos^3 \theta, \operatorname{sen}^3 \theta)$

(f) $\operatorname{sen}(xy) + y^2 = 2$; $(0, -\sqrt{2})$

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

14. Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplificando si es posible:

(a) $xe^{\sqrt{x}}$
(b) $xe^x \operatorname{sen} x$
(c) $\log(1+\operatorname{sen} x)$
(d) $(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arctg} x}$
(e) $\operatorname{arcsen}(1-\cos x)$
(f) $\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$
(g) $(\operatorname{arctg} x)^{(\log x)(\operatorname{sen} x)}$
(h) $e^{\sqrt{x}} \operatorname{arctg}(1/x) \operatorname{sen}(\frac{2x}{1+x^2})$
(i) $\operatorname{tg}^2 x$
(j) $3\cos x + 2\operatorname{sen} x$
(k) $(x^2+1)\operatorname{arctg} x$
(l) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
(m) $x^3 \operatorname{arcsen} x$
(n) $\dfrac{x+x^{1/2}}{x-2x^{1/3}}$
(o) $\operatorname{sen}^3 x$
(p) $\log \operatorname{tg} x$
(q) $5x^{2/3} - x^{5/2} + 2x^{-3}$
(r) $\operatorname{tg}(x^2)$
(s) $5^{\cos x}$

15. Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplificando si es posible:

(a) $\log \operatorname{sen}(x^3+1)$
(b) $\log^5 \operatorname{tg}(3x)$
(c) $\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}$
(d) $\log(x+\sqrt{x^2+1})$
(e) x^x
(f) $\operatorname{sen}^2\sqrt{\dfrac{1}{1-x}}$
(g) $\log(x+\sqrt{x^2-1})$
(h) x^{x^x}
(i) $x^{1/\log x}$
(j) $(\cos x)^{x \operatorname{sen} x}$
(k) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
(l) $(\operatorname{arctg} x)^{x-2}$
(m) $y = \operatorname{arcsen}\dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} x}{1-\cos a \cos x}$
(n) $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
(o) $e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$
(p) $\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$

16. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$. Calcula la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \sqrt{2}$. Calcula los puntos en los que la recta tangente es horizontal, así como aquéllos en los que la recta es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

17. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones, calculando las derivadas cuando existan ($a, b \in \mathbb{R}$):

(a) $f(x) = x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x^b), & x \in (0,1); \\ a, & x \notin (0,1). \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & x \in \mathbb{Q}; \\ x, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

(d) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{(\cos x)^\pi}$

18. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{1/x}}x, & x > 0 \\[2ex] \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & x < 0 \end{cases}$$

(a) Define la función en $x = 0$ para que sea continua en dicho punto. Estudia la continuidad de f en el resto de los puntos.

(b) Con el valor de $f(0)$ asignado en el apartado anterior, estudia la derivabilidad de f en su dominio, calculando $f'(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

19. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \log x}{1+x^2}, & x > 0 \\ \\ \sqrt{x^2 - x^3}, & x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f.

(b) Prueba que la ecuación $\log z + z + 1 = 0$ tiene una única solución α en $(0, +\infty)$. Prueba que $\alpha \in (e^{-2}, e^{-1})$.

(c) Determina los intervalos de crecimiento y los extremos absolutos de f en términos de α, calculando si existen su máximo y su mínimo absoluto.

20. Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x) = \begin{cases} e^{x+1/x}, & x < 0 \\ 2x \operatorname{arctg} x - \log(1+x^2) - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

21. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones ($a, b \in \mathbb{R}$, $p > 0$):

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{1+e^{1/x}}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ \frac{\operatorname{sen}^2(bx) - x^2}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x \operatorname{arctg}(1/x), & x > 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(|x|^p \log |x|), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^p \log x, & x > 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1 - e^{1/x}, & x < 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \log x}{a + x}, & x > 0 \\ b, & x = 0 \end{cases}$

22. Sea $f(x) = \sqrt{x^2 + |x-1| - 1}$.

(a) Determina el dominio de f, que denotaremos S.

(b) Estudia la continuidad de f en S.

(c) Determina los puntos de S donde f es derivable, y calcula la derivada en dichos puntos.

23. Sea $p \in \mathbb{R}$. Se considera la función $f(x) = (1 - e^{-x^2})^p$. En términos del parámetro p:

(a) determina el dominio de f;

(b) estudia la continuidad y derivabilidad de f en cualquier punto $x_0 \neq 0$ de su dominio y calcula f' en los puntos donde f es derivable;

(c) estudia la continuidad y derivabilidad de f en el origen;

(d) Estudia la derivabilidad de segundo orden de f en el origen.

24. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 + x + \frac{x^2}{2}, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$ ¿Cuántas veces es f derivable en $x = 0$?

25. Usa las aproximaciones lineales para estimar las variaciones en las magnitudes siguientes:

(a) La longitud de una circunferencia, si su radio varía de $r = 10$ a $r = 10.1$

(b) El área de un cuadrado, si su lado disminuye de $\ell = 1$ a $\ell = 0,9$

(c) El área de un cuadrado, si su diagonal aumenta de $d = \sqrt{2}$ a $d = 1,5$

(d) El área de la superficie de la esfera, si su radio aumenta de $r = 5$ a $r = 5,2$

(e) El volumen de un cilindro, si tanto su radio como su altura decrecen de 3 a 2,9.

26. Determina y' mediante derivación implícita, en el punto indicado, así como las rectas tangente y normal a la curva en dicho punto. Determina también los puntos de las gráficas anteriores donde la tangente es horizontal.

(a) $x^2 \cos y = y + 1;\ (1, 0)$

(b) $x^4 + y^4 + 2 = 4xy^3;\ (-1, -1)$

(c) $\operatorname{sen}^2 y + x^2 = 1;\ (\sqrt{2}/2, \pi/4)$

(d) $e^{x+y} = y + 1;\ (0, 0)$

(e) $\operatorname{sen}(xy) = x - y;\ (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$

(f) $\arctan(x + y) = xy;\ (0, 0)$

27. Consideremos $y = y(x)$ dada por $y \cos y = x$, $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$. Usa la diferencial para estimar el valor de $y(0.1)$, y estudia la precisión de la igualdad $y \cos y = x$.

Problemas Tema 4

Aplicaciones del Cálculo Diferencial

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$

(c) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

(d) $f(x) = \cos x - x$

(e) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12$

(f) $f(x) = x^2 e^{-x}$

2. Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$

(c) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 82x + 8$

(d) $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x$

(e) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, $x \in [-2, 2]$

(f) $f(x) = x^2\sqrt{6 - x^2}$

3. Halla los máximos y mínimos absolutos, si existen, en los casos siguientes:

(a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$

(b) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$

(c) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x+1)$ en su dominio

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2x^4 - x + 1}$ en $(0, 1]$, $[0, 1]$ y $\mathbb{R}$

(e) $f(x) = e^{-x^2}$ en $[-1, 1]$, $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$

(f) $f(x) = x^2 \log x$ en $[e^{-1}, e]$ y $(0, +\infty)$

4. Calcula los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{x^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{x^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)^{\operatorname{tg} x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\log x}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2^-} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(x - \operatorname{sen} x)^3}{\operatorname{sen}^{10} x}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1 + x^2)^{\log x}$

5. Sea $f(x) = x^2(1 - \log x)$ para $x \in (0, +\infty)$, $f(0) = a$.

(a) Calcula a para que f sea continua en 0.
(b) Para ese valor de a, estudia la derivabilidad de f en $[0, +\infty)$.
(c) Estudia el crecimiento y la convexidad de f en $[0, +\infty)$.
(d) ¿Es f dos veces derivable en el origen?

6. Sea $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

(a) Estudia los intervalos de crecimiento de f, así como los extremos relativos y absolutos.
(b) Estudia los intervalos de convexidad de f.
(c) Determina los valores de a para los que la ecuación $f(x) = a$ tiene exactamente dos soluciones.

7. Sea $f(x) = \sqrt{x} \log x$.

(a) Determina el valor de f en el origen para que sea continua en ese punto.
(b) Estudia la derivabilidad de f en $[0, +\infty)$.
(c) Representa f gráficamente, estudiando, crecimiento, concavidad, etc.
(d) Determina los extremos rerlativos y absolutos de f en el intervalo $[0, e]$.

8. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + (x \log x)^2}, & \text{si } x > 0 \\ x + \sqrt{1 + x^2}, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

(a) Estudia su continuidad, derivabilidad, crecimiento, extremos y límites en el infinito.
(b) Prueba que la ecuación $f(x) = e^2/(e^2 + 1)$ tiene exactamente tres raíces reales.

9. (a) Prueba que la ecuación $\dfrac{x}{x-1} = \log(x - 1)$ tiene una única solución α en $(1, +\infty)$.
(b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = (x - 1)^{1/x}$ en $[1, +\infty)$.
(c) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
(d) ¿Para qué valores de β la ecuación $f(x) = \beta$ tiene solución única en $[1, +\infty)$?

10. Calcula las derivadas n-ésimas de las siguientes funciones ($a \in \mathbb{R}$).

(a) $p(x) = e^{ax}$
(b) $q(x) = \frac{1}{x+a}$
(c) $r(x) = \log(1 + x)$
(d) $s(x) = (1 + x)^a$
(e) $t(x) = \log(x^2 - 3x + 2)$

11. Calcula, usando polinomios de Taylor, los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{x^2}}{x - \operatorname{sen} x}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\arctan x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}x^2}{\log \frac{1+x}{1-x} - 2x}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{1 - \cos x}$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \operatorname{sen} x - e^x}{(\arctan x)^2}$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\operatorname{arcsen} x)^2 - x^2}{x^3 - (\log(1 + x))^3}$

(g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x^2} + x \operatorname{sen} x - 1}{(e^x - 1 - x)^2}$

(h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \arctan(x) - \dfrac{2}{\cos x} + 2}{x^4 + 18x^{2009}}$

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x} - \frac{2}{3}x}{\operatorname{arctg}(x) - x}$

12. (a) Escribe $x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 4$ en potencias de $x - 1$.

(b) Escribe $x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 60x + 14$ en potencias de $x - 3$.

13. (a) Encuentra los desarrollos de Taylor en el origen de orden 6 de las funciones $\operatorname{sen}(x^2)$ y $(\operatorname{arctg} x)^2$.

(b) Calcula en función de $p \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2 - \operatorname{sen}(x^2) + \frac{2}{3}x^4}{x^p}.$$

14. (a) Encuentra el polinomio de Taylor en el origen de grado 4 de la función $f(x) = e^{-x^2/2}$.

(b) Usa el apartado anterior para calcular el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^4}$.

15. (a) Encuentra los desarrollos de Taylor de grado 3 en el origen de $\sqrt[3]{1+x}$, $\frac{1}{1-x/3}$ y e^{x^3}.

(b) Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} + \frac{1}{1+x/3} - 2e^{x^3}}{x - \arctan x}$$

16. Encuentra el monomio que es infinitésimo equivalente a $-\log(\cos x)$ cuando $x \to 0$.

17. Una lata de cerveza tiene una capacidad de 330 cm^3. ¿Cuáles son sus dimensiones, si el material empleado en su fabricación ha sido mínimo?

18. La suma de los volúmenes de dos cubos es de 1 litro. ¿Cuál debe ser la longitud de sus lados para maximizar la suma de las áreas de sus superfícies? ¿Y para minimizarla?

19. Se dispone de dos varillas de a metros y de otras dos de b metros con las que se desea confeccionar una cometa, y que serán usadas como perímetro de la misma. Calcula el área máxima de la cometa que puede fabricarse con estas varillas, así como la anchura y la longitud de dicha cometa.

20. Un recipiente cilíndrico sin tapa debe tener un volumen V. El material del fondo cuesta a euros por m^2, mientras que el del lateral cuesta b euros por m^2. ¿Qué dimensiones minimizan el costo del recipiente?

21. Determina el punto de la parábola $y = 4 - x^2$ que está más cerca del punto $(3, 4)$.

22. Cada página de un libro tiene 250 cm^2 de impresión. Cada página ha de tener 3 cm de margen superior e inferior, y 2 cm de márgenes laterales. Calcula las dimensiones de la página que minimizan su superficie.

23. ¿Cuál es la longitud del segmento de recta más corto contenido en el primer cuadrante, con extremos en los ejes coordenados, y tangente a la curva $y = a/x$?

24. Recortando en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 8 cm $\times$ 5 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente, se construye una caja (sin tapa). Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.

25. Los lados de un triángulo rectángulo están sobre los semiejes positivos y una recta que pasa por el punto (a, b). Halla los vértices de modo que su área sea mínima.

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

26. Halla los extremos relativos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x(x^2-4)^{-1/3}$ (b) $f(x) = x^5(x-1)$ (c) $f(x) = \operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x$

27. Demuestra las desigualdades

$$\frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{\tan b - \tan a}{b-a} \leq \frac{1}{\cos^2 b}, \quad 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$$

28. ¿Verifican el teorema del valor medio en el intervalo indicado las siguientes funciones? En caso afirmativo, encuentra el punto c, en caso negativo explica la razón.

(a) $f(x) = x^3$, $x \in [-1,1]$
(b) $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$
(c) $f(x) = x|x|$, $x \in [-1,1]$
(d) $f(x) = |x|^3$, $x \in [-1,2]$
(e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \in [0,2]$
(f) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$

29. Calcula, si existen, los siguientes límites ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a, b > 0$):

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \log x$
(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$
(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha \log x$
(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha - \beta \log x$
(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha e^{-x}$
(f) $\lim\limits_{x\to \infty} e^x - \log x$
(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log(1-\cos x)}$
(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

30. Calcula, si existen, los siguientes límites ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a, b > 0$):

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$
(b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} x \operatorname{tg} x - \dfrac{\pi}{2} \sec x$
(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
(e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
(f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$
(g) $\lim\limits_{x\to (\frac{2}{\pi})^+} (\operatorname{tg}(1/x))^{\cos(1/x)}$
(h) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x^2 - a^2}$
(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$
(j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\operatorname{sen}(x-1)}{1-\cos(x-1)}$
(k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x \operatorname{sen} x}\right)$
(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

31. Calcula los límites ($a > 0$):

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x - \arctan x)^2}{(\sqrt{1+x^2}-1)^3}$
(b) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$
(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(\log(1+x))}{\log(\cos x)}$
(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x - \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

32. Consideremos las funciones $f(x) = x + \operatorname{sen} x \cos x$ y $g(x) = e^{\operatorname{sen} x}(x + \operatorname{sen} x \cos x)$.

(a) Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

(b) ¿Existe $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$? En caso afirmativo, calcúlalo.

(c) ¿Existe $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$? En caso afirmativo, calcúlalo.

(d) Comenta los resultados obtenidos en relación con la regla de L'Hôpital.

33. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$ en el origen?

34. Sea $f(x)=\sqrt{|x|-|x-1|}$.

(a) Determina el dominio de f, y estudia la continuidad y derivabilidad en los puntos del dominio.

(b) Representa f gráficamente.

(c) Encuentra el rectángulo de mayor área que tiene los lados paralelos a los ejes coordenados, cuyo vértice superior izquierdo está sobre la curva $y=f(x)$, y cuyo vértice inferior derecho es $(1,0)$.

35. Sea $f(x)=x-\arctan(2x)$, $x\in[0,+\infty)$. Represéntala gráficamente, estudiando previamente el corte con los ejes, el crecimiento, la convexidad, los límites en los extremos del intervalo y los extremos relativos y absolutos.

36. Sea $f(x)=1-x+x\log x-x(-\log x)^2$ para $x\in(0,1]$.

(a) Define $f(0)$ para que f sea continua en $[0,1]$.

(b) Para ese valor de $f(0)$, estudia la derivabilidad de f en su dominio, calculando la derivada en los puntos donde exista.

(c) Estudia el crecimiento y la convexidad de f, y sus extremos absolutos y relativos.

(d) Representa gráficamente f.

37. Sea $f(x)=\log(1+x^2)+2\arctan\dfrac{1}{x}$ si $x\neq 0$, $f(0)=\pi$.

(a) Estudia la continuidad y diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}$.

(b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f en $(-\infty,0)$ y $(0,+\infty)$.

(c) Calculando los límites $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, determina razonadamente los valores de a para que la ecuación $f(x)=a$ tenga una única solución.

38. Se considera la función $f(x)=x\mathrm{e}^{|x|}$. Estudia razonadamente:

(a) Su dominio y calcula $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

(b) La continuidad y diferenciabilidad de f.

(c) El crecimiento y los extremos de f.

(d) La concavidad y convexidad de f.

(e) El número de soluciones de la ecuación $f(x)=a$, siendo $a\in\mathbb{R}$.

39. Representa gráficamente la curva $y = e^{-x^2}$, estudiando corte con los ejes, asíntotas, crecimiento, concavidad, etc. Encuentra el rectángulo de mayor área de entre todos los que tienen dos vértices en el eje OX y los otros dos sobre la curva $y = e^{-x^2}$. Justifica que dicha área es máxima.

40. Representa gráficamente las siguientes funciones estudiando su dominio de definición, crecimiento, máximos y mínimos relativos, límites, asíntotas,... ($\alpha \in \mathbb{R}$):

(a) $\log(1+x^2) - 2x$
(b) $\dfrac{\log|x|}{x}$
(c) x^x
(d) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
(e) $x \operatorname{arctg}(1/x)$
(f) $x^{1/x}$
(g) $\dfrac{x}{4-x^2}$
(h) $\dfrac{2x^3-5x^2+4x}{x^2-2x+1}$
(i) $x^{2/3}(5-x)$
(j) $1-x^{1/3}$
(k) $x(x-1)^{2/3}$
(l) $(3-x)\sqrt{x}$
(m) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
(n) $x^2 \cos x$
(o) $\operatorname{sen} x + \cos x$

41. (a) Prueba que la ecuación $\operatorname{sen} x - x\cos x = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(0, 2\pi]$. Sea c dicho valor.
Se define $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$.

(b) Encuentra el dominio de f. Define $f(0)$ de modo que f sea continua en todo su dominio.

(c) Estudia la derivabilidad de f en su dominio.

(d) Expresa en términos de c los intervalos de crecimiento y extremos absolutos de f en $[0, 2\pi]$.

(e) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

42. (a) Prueba que la ecuación $x^2 = x\operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones $\pm x_0$.

(b) En términos de x_0, estudia los intervalos de crecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x\cos x - 2\operatorname{sen} x.$$

43. (a) Prueba que la ecuación $\arctan x + e^x + \frac{x}{1+x^2} = 0$ tiene una única solución real c. Prueba que $c \in (-1, 0)$.

(b) En términos de c, estudia los intervalos de crecimiento de la función

$$f(x) = e^x + x\arctan x.$$

(c) Encuentra el mínimo absoluto de f en términos de c.

44. (a) Prueba que la ecuación $4x^3 + e^x = 0$ tiene una única solución α en $\mathbb{R}$. Prueba que $\alpha \in (-1, 0)$.

(b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^4 + e^x - 2$ en $\mathbb{R}$, en función del valor α.

(c) Prueba que la ecuación $x^4 + e^x = 2$ tiene exactamente dos soluciones, una positiva y otra negativa.

45. Demuestra que si un móvil recorre en la unidad de tiempo la unidad de espacio empezando y terminando con velocidad nula, entonces, en algun momento su aceleración tuvo que ser en valor absoluto mayor o igual que cuatro.

46. Calcula el desarrollo de orden 3 en el origen de coordenadas de $\sqrt{1+x}$. Deduce el del mismo orden de la función $\sqrt{1+\operatorname{sen} x}$. Usando esos desarrollos, calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x^3}.$$

47. (a) Encuentra los desarrollos de Taylor de grado 4 en el origen de $x-\operatorname{sen} x$ y $(e^x-1)^3$.

(b) Se considera la función $f(x)=\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{(e^x-1)^3}$ para $x\neq 0$. Define la función en $x=0$ para que sea continua en dicho punto. Estudia la continuidad de f en el resto de los puntos.

(c) Con el valor de $f(0)$ asignado en el apartado anterior, estudia la derivabilidad de f en su dominio, calculando $f'(x)$ para cada $x\in\mathbb{R}$.

48. (a) Encuentra los desarrollos de Taylor de orden 6 en el origen de $\operatorname{sen}(x^2)$ y $\operatorname{sen}^2 x$.

(b) Usa el desarrollo anterior para deducir para cada $n\in\mathbb{N}$ el valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)-\operatorname{sen}^2 x}{x^n}$$

(c) Sea $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)-\operatorname{sen}^2 x}{x^n}$ para $x\neq 0$. Calcula los valores de $n\in\mathbb{N}$ para los que puede definirse $f(0)$ para que f sea continua en el origen.

(d) Para dichos valores de $n\in\mathbb{N}$ y $f(0)$, estudia la derivabilidad de f en el origen.

49. Se considera la función $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$ para $x\geq 0$.

(a) Estudia la derivabilidad de f en el origen hasta orden 2. Comprueba que $f''(x) = -\dfrac{1}{4}f(x)$ para $x\geq 0$.

(b) Calcula el polinomio de Taylor de f en el origen de orden 3.

(c) Usa el desarrollo anterior para deducir $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2(1-\cos x)}-x}{x^3}$.

50. (a) Encuentra el desarrollo de Taylor de orden 4 en el origen de $\dfrac{1+ax}{1+bx}$ para $a,b\in\mathbb{R}$.

(b) Usa el desarrollo anterior para calcular los valores de $a,b\in\mathbb{R}$ que hacen que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\frac{1+ax}{1+bx}}{x^3}$$

sea finito. ¿Cuál es su valor?

(c) Sea $f(x)=\frac{e^x-\frac{1+x/2}{1-x/2}}{x^3}$ para $x\neq 0$. Define $f(0)$ para que f sea continua en el origen. Para dicho valor de $f(0)$, estudia la derivabilidad de f en el origen.

51. Se considera la función $y = y(x)$ que verifica $y(0) = 0$, y viene dada implícitamente por la ecuación

$$xe^y = ye^x$$

Calcula $y'(0), y''(0)$. ¿Cuánto vale el límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{y(x)}{x^2}$?

52. Un recipiente abierto por la parte superior está formado por un cilindro terminado en su parte inferior por una semiesfera. ¿Qué dimensiones deberá tener dicho recipiente para que, siendo su volumen constante V, tenga la menor superficie posible?

53. Un espejo plano de dimensiones 80×90 cm se rompe por una esquina según una recta. De los dos trozos que quedan, el menor tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 10 y 12 cm, correspondientes respectivamente a las dimensiones menor y mayor del espejo. Hallar el área máxima del espejo rectangular que se puede construir con el trozo mayor.

54. Supongamos que el valor de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demuestra que rompiéndolo en dos partes existe una depreciación de su valor, y que esta depreciación es máxima cuando las dos partes son iguales.

55. Determina el segmento mínimo entre todos los que pasan por un punto (a, b) y están limitados por los ejes. Calcula la longitud máxima que puede tener una viga para que pueda pasar horizontalmente de una calle de anchura a a otra perpendicular de anchura b. Este problema de máximo es equivalente al anterior de mínimo.

56. La suma de las áreas de las superfícies de un cubo y una esfera es de 1 m^3. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para minimizar la suma de sus volúmenes? ¿Y para maximizarla?

57. La luz viaja con velocidad c a través del aire, y con una velocidad menor v a través del agua. Calcula el tiempo mínimo necesario para que el rayo viaje de un punto A situado en el aire a un punto B situado en el agua, y prueba que si α y β son los ángulos de incidencia y de refracción resp. con un eje vertical, la trayectoria que se realiza en menos tiempo verifica la igualdad

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{v} \qquad \text{(Ley de Snell)}$$

58. Se dispara un objeto con una velocidad inicial v y un ángulo de inclinación inicial α respecto de un eje horizontal. Calcula la ecuación de la trayectoria seguida por el objeto, así como el ángulo de inclinación que hace máxima la distancia horizontal recorrida por el objeto.

59. Un proyectil se lanza con velocidad inicial v y un ángulo de elevación θ desde la base de un plano inclinado 45° respecto de la horizontal. Calcula, en función de θ, el alcance del proyectil, y el ángulo θ que maximiza dicho alcance.

60. Halla la altura del trapecio isósceles de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio R, teniendo como base mayor el diámetro.

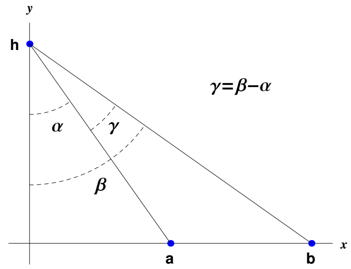
61. Una ventana tiene forma de rectángulo terminado por un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. La porción rectangular ha de ser de cristal transparente y la parte circular ha de ser de cristal de color que admite sólo la mitad de la luz por metro cuadrado que el cristal transparente. El perímetro externo de la ventana ha de tener longitud fija P. Halla, en función de P, las dimensiones de la ventana que deja pasar mayor cantidad de luz.

62. Determina la trayectoria de un móvil que se mueve con velocidad constante entre dos puntos de un mismo semiplano debiendo tocar en un punto a la recta que determina dicho semiplano para que el tiempo invertido sea mínimo.

Análogamente, para el caso de un punto en cada semiplano, y con velocidades v_1 y v_2 en cada semiplano.

63. Dados $a, b > 0$, con $ab < 4$, encuentra el triángulo de área mínima que tiene por vértices los puntos $(a, 0)$, $(0, b)$ y el otro en sobre la curva $y = 1/x$. Indica el valor del área mínima, justificando que se trata del mínimo absoluto.

64. Sea $0 < a < b$.
Se considera el segmento $[a, b]$ sobre el eje OX. Calcula la altura h del punto sobre el eje OY que abarca dicho segmento con mayor ángulo γ.
Calcula dicho ángulo y justifica que tal valor es efectivamente el máximo absoluto.

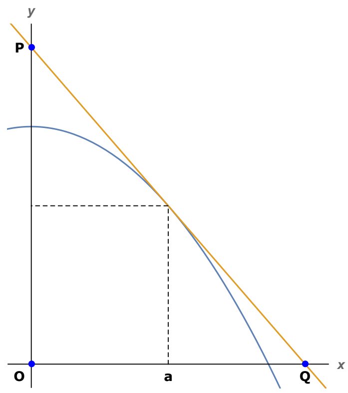


65. Dada la función $f(x) = 1 - x^2$ para $x \in [0, 1]$, para cada $a \in [0, 1]$, se considera la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abcisa a. Calcula el valor de a que hace que

(a) el triángulo OPQ que forma dicha recta con los ejes coordenados sea tenga área mínima;

(b) la longitud del segmento PQ de dicha recta comprendido entre los ejes coordenados sea mínima.

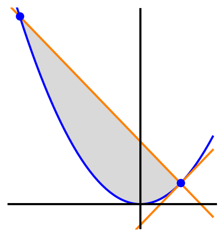
En ambos casos, calcula el mínimo de la magnitud que se minimiza, y justifica que efectivamente es el mínimo absoluto.



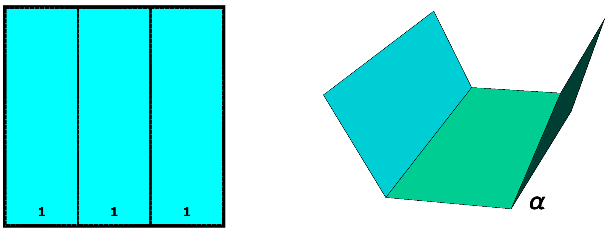
66. De todas las rectas que cortan perpendicularmente a la parábola

$$y = x^2$$

en un punto del primer cuadrante, encuentra aquélla que hace mínima el área comprendida entre la recta y la parábola.



67. Se construye un depósito como el de la figura con una lámina cuadrada de metal de 3 m. de lado. Expresa el volumen que encierra en términos de α y halla el máximo volumen posible. (La figura es un prisma recto cuya base es un trapecio. El volumen es igual al área de la base por la altura.)



Problemas Tema 5

Métodos de integración

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Calcula las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int (3x^4 - 2x + 4)\, dx$ (d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$ (g) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx$

(b) $\displaystyle\int (x^{-3} + 4x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{3}{4}})\, dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\log^3 x}{x}\, dx$ (h) $\displaystyle\int \cos 2x\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{x-1}\, dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x^2}\, dx$ (i) $\displaystyle\int 3x\sqrt{1-2x^2}\, dx$

2. Obtén las siguientes primitivas de funciones racionales:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+2)}\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)}\, dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3-(x+1)}{x^3-x^2}\, dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x^2+x+1)(x-1)}\, dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}\, dx$

3. Calcula las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \log x\, dx$ (e) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\, dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx$ (f) $\displaystyle\int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\, dx$ (j) $\displaystyle\int \sqrt{1-\cos x}\, dx$

(c) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen} 2x\, dx$ (g) $\displaystyle\int (\log x)^3\, dx$ (k) $\displaystyle\int (x^2\log x - x\log^2 x)\, dx$

(d) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\, dx$ (h) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{2+x}}\, dx$

4. Calcula las siguientes primitivas de funciones trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x}\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(1+\cos^2 x)}\, dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x\operatorname{sen} x}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{1-\cos x}\, dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}\, dx$

5. Obtén las primitivas de las siguientes funciones irracionales:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \sqrt{\sqrt[3]{x^2}+2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

6. Calcula las integrales abelianas siguientes:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ (e) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$ (d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\,dx$

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

7. Calcula las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ (k) $\displaystyle\int x\,(\log x)^2\,dx$

(b) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int x(\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$ (l) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-x^2}$ (h) $\displaystyle\int \log^2 x\,dx$ (m) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\log(\operatorname{tg} x)\,dx$ (n) $\displaystyle\int \cos(\log x)\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{ax+b}\,dx$ (j) $\displaystyle\int x^a\log x\,dx$ (o) $\displaystyle\int \cos^2(\log x)\,dx$

8. Obtén las siguientes primitivas de funciones racionales:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+9)^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{x}{(2+3x)^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{1+x}{x^2(1+x^2)}$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+4}{x^2+4}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^4}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^3}$

(c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4}$ (i) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-1}\,dx$

9. Calcula las siguientes primitivas de funciones trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+4\cos^2 x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos x}$ (h) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x}{1-2\operatorname{tg} x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$ (f) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{1}{a+b\cos x}\,dx$

10. Obtén las primitivas siguientes:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{-3}{2}}}{x+x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^{1/3}}{(1+x)^{7/3}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)\sqrt{x+1}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{16-x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$

11. Calcula la primitiva $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{k/2}}$ para los valores de $k=1,2,\ldots 6$.

Problemas Tema 6

La integral de Riemann

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Calcula el valor de las siguientes integrales de Riemann:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + x(x-2))\, dx$ (d) $\displaystyle\int_0^2 (1+x^2)^3\, dx$ (g) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x^2-1|\, dx$

(b) $\displaystyle\int_2^5 \frac{7}{(x-1)^2}\, dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ (h) $\displaystyle\int_0^3 |x-\sqrt{x}|\, dx$

(c) $\displaystyle\int_1^2 (1+\sqrt{x})^3\, dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\, dx$ (i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{1+\cos^{10} x}\, dx$

2. Calcula la derivada de f en los siguientes casos:

(a) $\displaystyle f(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^3}$ (b) $\displaystyle f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{u}}{1+u}\, du$ (c) $\displaystyle f(t) = \int_{t^3}^{t^2} \frac{x^6}{1+x^4}\, dx$

3. Calcula $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ si f viene dada por

$$f(x) = 1 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen} t}{2+t^2}\, dt.$$

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

4. Sea $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Demuestra:

(a) si f es par, entonces $\int_{-a}^a f(t)\, dt = 2\displaystyle\int_0^a f(t)\, dt$;

(b) si f es impar, entonces $\int_{-a}^a f(t)\, dt = 0$.

5. Acota las siguientes integrales usando el teorema de la media:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+2x^2}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{8+v}\, dv$ (c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{1+t^2}\, dt$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\theta(1-\theta)}\, d\theta.$

6. Sabiendo que $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$, calcula $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}\,dx$ y $\int_0^{\pi/4} \frac{x\,dx}{\cos x(\cos x + \operatorname{sen} x)}$.

7. Calcula la integral $\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$. Indicación: hacer el cambio $t = \pi - x$.

8. Sea f una funcion par y continua. Prueba que $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x f(\cos x)\,dx = \pi \int_0^1 f(x)\,dx$.

9. Para $x \in \mathbb{R}$, sea $f(x) = \int_0^{x^3} e^{-t^{2/3}}\,dt$. Calcula razonadamente la derivada de f y obtén el polinomio de Taylor de grado tres de f en $x = 0$. Usando dicho desarrollo, calcula

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + f(x)}\right).$$

10. (a) Dada la función

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dt.$$

estudia la continuidad y derivabilidad de F en su dominio. Calcula $F'(x)$ donde exista.

(b) ¿Tiene la función $f(x) = xe^{-|x|}$ primitiva? En caso afirmativo, calcúlala.

(c) Deduce el valor de $F(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

11. Se considera la función

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} |1 - t^2|\,dt, \qquad x \in [0,2].$$

Estudia la continuidad y derivabilidad de F en su dominio. Calcula $F'(x)$ donde exista.

12. Encuentra una expresión explícita para una función f que verifique la ecuación

(a) $\int_0^{f(x)} t^2\,dt = x^2(1+x)$ (b) $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^2(1+x)$

Problemas Tema 7

Integrales impropias

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias. Calcúlalas si convergen.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{2} \log(|x-1|)\,dx$ (g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{1-x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \log x\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx$

2. Estudia el carácter de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x^2)\log x}{x^2}dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}dx$ (g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{|1-x^2|}}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} x)\log|x-\pi|}{x(x-1)}dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{|x-1||x-2|}}dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x-1)\log|x-1|}{\sqrt{x}(x+2)^2}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p(1+x^2)}dx$ (i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x(1+x)^p}dx$

3. Estudia la convergencia de las integrales ($p \in \mathbb{R}$)

(a) $\displaystyle\int_0^{1} |\log x|^p\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(\log x)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x\,dx}{\sqrt{x}|1-x^2|^{\frac{3}{2}}}$

En caso de convergencia, determina sus valores en función de Γ (usa que $\Gamma(3/2)=\sqrt{\pi}/2$).

4. Se considera la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^\alpha x}\,dx.$

(a) Calcula para qué valores de α la integral es una integral impropia de Riemann.

(b) De entre los valores anteriores, calcula α para que la integral sea convergente.

5. Para cada $p \in \mathbb{R}$, estudia el carácter de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^p x}{\sqrt{1-\cos x}}dx.$

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

6. Estudia el carácter de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{(1-x)^p}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^\beta |1-x|^{1-\beta}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1+\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{(x+1)^p}dx,$ $(p>0)$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(-\log x)^{1/2}}$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^3}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x^3-x|}}$

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\log x\,dx$

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}x^{1/2}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

7. Estudia la convergencia de la siguiente integral impropia en función de los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, y calcula el valor de la integral para $a = b = 1/2$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}\,dx.$$

8. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, $f(0) = 0$, y derivable en el origen. Prueba que converge $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{3/2}}\,dx$.

9. En función de α, estudia la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\operatorname{sen}^\alpha(1/x)\;dx$.

10. Estudia el carácter de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\log x\,dx$.

11. Estudia la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^p}}{x^q}\,dx$ en función de $p, q \in \mathbb{R}$.

12. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}$. Calcula una función F tal que $F'(x) = f(x)$, $F(0) = 0$. Calcula:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+(F(x))^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{F(x)}\,dx$

13. (a) Estudia el carácter de la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2-1}{t^4+1}dt$.

(b) Mediante el cambio de variable $t = 1/s$, prueba que el valor de dicha integral impropia es igual al de la integral de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{t^4+1}dt$.

Se define $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{t^2-1}{t^4+1}dt$.

(c) Estudia la derivabilidad de F en $\mathbb{R}$ y calcula F'.

(d) Estudia los extremos relativos de F, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(e) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ usando el apartado b).

(f) Representa F gráficamente.

Problemas Tema 8

Aplicaciones de la integral

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Calcula el área de las siguientes figuras planas:

(a) El recinto formado por los puntos (x, y) del plano que verifican $x^2 + y^2 \leq 36$, $y^2 \geq 9x$.

(b) La superficie encerrada entre la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.

2. Calcula el área de la región comprendida entre las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

3. Calcula el área y el volumen de la región plana del círculo de centro el origen y radio 1 que se encuentra entre la parábola $y = x^2$ y el eje OX.

4. Calcula la longitud y el área encerrada por las siguientes curvas de ecuación en polares:

(a) $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$

(b) $r = \sqrt{|\cos 3\theta|}$

5. Halla la longitud de la cardioide de ecuación en polares $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$.

6. Halla las longitudes de las siguientes curvas:

(a) La de ecuación $y = 4 + x^2$ entre los puntos de abcisas $x = 0$ y $x = 4$.

(b) La astroide $|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.

7. Calcula la longitud total de la curva de ecuación $r = e^{-\theta}$, $\theta \in [0, +\infty)$.

8. Halla el volumen de los siguientes sólidos:

(a) El que tiene como base el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, y $(1, 1)$ en el plano OXY, y cuyas secciones por planos perpendiculares al eje OX son cuadrados.

(b) El toro engendrado al girar el círculo $x^2 + y^2 \leq 9$ alrededor de la recta $x = 4$.

(c) El obtenido al quitarle a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, el cilindro $x^2 + y^2 \leq r^2$, $0 < r < 1$.

(d) Aquél que tiene una base circular de radio 4 y que toda sección plana perpendicular a un diámetro fijo de la base es un triángulo equilátero.

(e) El engendrado al girar el área acotada por la parábola $y = x^2 + 2x$ y el eje OX alrededor de $y = 2$.

9. (a) Calcula el área comprendida entre las parábolas $y = x^2$ e $y = 1 - x^2$. ¿Es ese valor mayor o menor que 1?

(b) Calcula el volumen de revolución de la superficie anterior alrededor del eje OX y alrededor del eje OY. ¿Cuál de ellos es mayor?

10. Calcula el volumen de revolución generado al girar el área comprendida entre las curvas $y = x/2$ e $y = x \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

11. Halla la superficie de revolución que se obtiene al girar la gráfica $y = \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alrededor del eje OX.

12. Calcula la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva de ecuación $y = 1 - x^2$, $x \in [-1, 1]$, alrededor del eje OX.

13. Encuentra el espacio recorrido por un móvil sobre una recta, y que en cada instante $t \in [0, 2]$ lleva una velocidad $v(t) = 1 - t^2$.

14. La Ley de Gravitación Universal afirma que la fuerza con la que se atraen dos masas m_1 y m_2 es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre las dos masas ¿Cuánto trabajo se necesita para elevar un módulo espacial que pesa 15 toneladas en la superficie de la Tierra?

15. Un tanque esférico de 8 m de radio está lleno por su mitad de un aceite de densidad 2 kg/l. Calcula el trabajo requerido para bombear el aceite a través de un orificio en la parte superior del tanque.

16. La presión que ejerce un fluído sobre un cuerpo sumergido en él a una profundidad h es proporcional a h. Calcula la fuerza ejercida por el agua sobre una ventana circular de un submarino de 1 m de diámetro, que se encuentra a una profundidad de 8 m por debajo del nivel del mar.

17. Una piscina rectangular de dimensiones 4×3 mide 1 de profundidad en un extremo y 5 en el otro. Calcula la fuerza ejercida por el fluido contra uno de las paredes que miden 4.

18. Calcula la masa total de una varilla de 2 cm de longitud, y cuya densidad lineal en cada punto $x \in [0, 2]$ viene dada por la expresión $r(x) = x^3$ gr/cm.

19. Halla el centro de masas de una lámina de densidad uniforme y

(a) limitada por las gráficas $y = 4 - x^2$ y el eje OX;

(b) con forma de triángulo rectángulo de catetos a y b;

(c) con forma de cuadrante de círculo de radio R.

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

20. Calcula el área de las siguientes figuras planas ($a \geq b > 0$):

(a) La encerrada, a la vez, por la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ y la elipse $(x/b)^2 + (y/a)^2 = 1$.

(b) La limitada por la astroide $|x/a|^{2/3} + |y/b|^{2/3} = 1$.

21. Calcula para qué valor de $r > 0$ la curva $y = r\cos x$ divide en dos partes de igual área la región limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje de abscisas cuando $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

22. Halla el área acotada entre la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ y su asíntota.

23. Sea S el subconjunto de los puntos (x, y) del plano tales que $0 \le y \le \min\{4 - x^2, 5x - 2x^2\}$.

(a) Calcula el área de S.

(b) Halla $a < 0$ para que al girar S alrededor de la recta $y = a$ se obtenga un sólido de volumen 20π.

24. Calcula el volumen engendrado al girar la curva de ecuación $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ y su asíntota.

25. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Calcula la asíntota de f, y calcula el volumen de revolución de la curva $y = f(x)$ alrededor de su asíntota.

26. Calcula el área comprendida entre las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = |\log x|$ entre $x = 0$ y $x = e$. Calcula el volumen de revolución del área anterior.

Justifica que ambas cantidades son finitas.

27. Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje OX la región del plano encerrada por las circunferencias de radio 1 y centros $(-1/2, 1)$ y $(1/2, 1)$.

28. Calcula la superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje OX la curva de ecuación $y = x\sqrt{\frac{1}{8} - x^2}$.

29. Estudia si es finita el área del recinto limitado por la curva $y = \dfrac{\log x}{x^2 - 1}$, $x \in (0, 1)$, así como el volumen y la superficie lateral del sólido de revolución de dicho recinto alrededor de OX.

30. Según la Ley de Hooke, la fuerza requerida para comprimir o estirar un muelle es proporcional a la distancia d que representa la diferencia entre la longitud del muelle comprimido o estirado y la longitud original. Es decir, $F = k \cdot d$, donde la constante k depende de las características del muelle. Si con una fuerza de 3 Nw se comprime en 3 cm un muelle desde su longitud natural de 15 cm, calcula el trabajo realizado al comprimir el muelle 3 cm más.

31. Una cadena de 10 m, que pesa 1 kg/m, yace en el suelo. ¿Cuanto trabajo se precisa para elevar uno de sus extremos hasta 10 m de altura, de manera que quede totalmente extendida?

32. Calcula el trabajo realizado al levantar verticalmente el extremo inferior de una cadena colgante de 6 m de longitud, que pesa 3 kg/m, hasta una altura de 6 m, dejando la cadena doblada por la mitad y todavía colgante.

33. Un tanque cilíndrico de 1 m de radio reposa sobre su lado, y está lleno hasta la mitad de petróleo de densidad 10 kg/m^3. Determina la fuerza total ejercida por el petróleo en un extremo del tanque.

34. La cuerda de ecuación $y = x^2$, $x \in [0, 1/2]$ tiene una densidad lineal $r(x) = x$. Calcula su masa, y su centro de masas.

Problemas Tema 9

Series numéricas

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Calcula el límite de las siguientes sucesiones de números reales:

(a) $\dfrac{n^2+2}{n+1}$

(b) $\dfrac{n^5+3n^2-3}{2n^5-5n+4}$

(c) $\dfrac{n^5+4n^4-n}{n^4+5}$

(d) $\dfrac{\sqrt{n+2}-1}{\sqrt{n}}$

(e) $\sqrt{n^2+n}-n$

(f) $\dfrac{(-2)^n+3^3}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

(g) $\dfrac{\log(3n^2+4n+5)}{\log(n+10)}$

(h) $\dfrac{\log(e^n+4)}{\log[(e^{-n}+1)(4^n+2^n)]}$

(i) $\dfrac{2+(-1)^n}{\log(n+2)}$

(j) $\dfrac{n^{2/3}\operatorname{sen}(n!)}{n+1}$

(k) $\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$

(l) $\dfrac{n^{2n}}{(1+n^2)^n}$

(m) $\left(\dfrac{a+n}{a+n-1}\right)^n$

(n) $\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$

(o) $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

(p) $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$

2. Calcula a sabiendo que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(n+a)}{\log n}\right)^{n\log n}=2.$

3. Halla, calculando sus sumas parciales, el carácter de las series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}0.2^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

4. Estudia el carácter de las series de término general:

(a) $\dfrac{1}{n^2-2n+3}$

(b) $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$

(c) $\dfrac{1+3^n}{2^n}$

(d) $\dfrac{n^2+n}{2n^5-1}$

(e) $\dfrac{n3^{n+1}}{2^n}$

(f) $(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$

(g) n^4e^{-2n}

(h) $\dfrac{n^3}{n!}$

(i) $\dfrac{n!}{n^n}$

(j) $\dfrac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$

(k) $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

(l) $\dfrac{n^2}{(n+1)!}$

(m) $\dfrac{n+1}{(2n-1)^n}$

5. Estudia el carácter de las series de término general:

(a) $\dfrac{e^n n!}{n^n}$ (b) $\dfrac{n^x}{n^{3x}+1}$, $x>0$ (c) $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$ (d) $1-\cos\dfrac{1}{n}$ (e) $\dfrac{(-1)^n}{n^2+n+1}$ (f) $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (g) $\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$

6. Demuestra que las siguientes series convergen, y calcula su suma:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+3)},\quad \sum_{n\geq 2}\frac{n+1}{n^3-n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(n+1)a^n, |a|<1,\quad \sum_{n\geq 3}\frac{n^2}{2^n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{2n+1}{3^n}$

7. La sucesión de sumas parciales de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ viene dada por $s_n = \dfrac{3n+2}{n+4}$. Halla el término general a_n de la serie, determina su carácter y su suma si es convergente.

8. Se deja caer una pelota desde 10 metros de altura. Si en cada bote se pierde un 30% de altura, halla la longitud vertical total que recorre la pelota.

9. Calcula con un error menor que una milésima la suma aproximada de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$, probando previamente que la serie es convergente.

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

10. Demuestra, aplicando la definición de límite

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5-2n}=-\frac{3}{2}$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-12n+1}{n+2}=+\infty$ (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-5)^{n^2-2n}=\infty$

11. Calcula el límite de las siguientes sucesiones de números reales:

(a) $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$

(b) $\sqrt[3]{n^2+8}-\sqrt[3]{n^2-3}$

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4}}$

(d) $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

(e) $\dfrac{n+\operatorname{sen} n^2}{n+\cos n}$

(f) $(8^n+4^n)\operatorname{sen}^3\dfrac{1}{2^n}$

(g) $\left(\dfrac{n+1}{n^2+n+5}\right)^{\frac{1}{1+\log n}}$

(h) $\dfrac{\log(n!)}{\log n}$

(i) $\left(\dfrac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^n$

(j) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{k+1}$

(k) $(n^2+n)^{1/(2n+1)}$

12. Calcula los límites de las sucesiones de términos generales:

(a) $\left(\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n$

(b) $\left(\dfrac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^n$

(c) $\dfrac{n^{2n}}{(1+n^2)^n}$

(d) $\left(1+\operatorname{sen}(\dfrac{1}{n})\right)^n$

(e) $\left(\dfrac{a+n}{a+n-1}\right)^n$

(f) $(1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$

(g) $(2+3n^4)^{1/(1+2\log n)}$

(h) $\left(\dfrac{n+1}{n^2+n+5}\right)^{1/(1+\log n)}$

(i) $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $(a,b>0)$

(j) $\left(1+\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^p}\right)^{\sqrt{n}}$, $(p>0)$

(k) $\dfrac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2}$

(l) $\left[\dfrac{1!+\cdots+n!}{n!}\right]^{\frac{n!}{1!+\ldots(n-1)!}}$

(m) $\left[\dfrac{1^p+\cdots+n^p}{n^p}\right]^{1/n}$

13. Estudia el carácter de las series cuyo término general es el siguiente:

(a) $\dfrac{n!}{(n+1)^n 2^n}$

(b) $\dfrac{2n+1}{n3^n}$

(c) $(-1)^n\dfrac{n^4}{n^4+1}$

(d) $(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3\log n}$

(e) $(\sqrt[n]{n}+2)^n$

(f) $\dfrac{3^n+(-2)^n}{6^n}$

(g) $\dfrac{5^n+\sqrt{n}}{5^n\sqrt{n}}$

(h) $\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}$

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$

(j) $\dfrac{3^n}{n^2+4}$

(k) $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

(l) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n(2n+1)(2n-1)}$

(m) $\dfrac{1}{3-\cos\frac{1}{n}}$

(n) nx^n

(o) $\dfrac{(-n)^n}{n^{2/3}+\cos n}$

(p) $\left(\dfrac{2n}{5n+1}\right)^{\frac{4n+2}{3}}$

(q) $\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{n}$

(r) $\dfrac{1}{\log n}$

(s) $\dfrac{x^{2n}}{\sqrt{n}}$

(t) $\dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$

(u) $\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{3}\right)\right]^n$

14. Demuestra que las siguientes series convergen, y calcula su suma:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n}{(n+1)!}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+1}{(n+1)!}$, (sabiendo que $e=\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$)

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{2n^{+}2n-2}{n^2(n^2-1)}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{3}{n^2(n^2-4)}$, (sabiendo que $\dfrac{\pi^2}{6}=\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$)

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\log\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$

15. Estudia, según los valores de $a\in\mathbb{R}$, la convergencia condicional y absoluta de las series:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n!a^n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{n(1+b^n)}$, $b>1$

16. Consideremos la serie de término general $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n(a-5)^n}{5^n}$. Estudia, según los valores de $a\in\mathbb{R}$, su convergencia. Para $a=6$, calcula $\displaystyle\sum_{n\geq 1}|a_n|$.

17. Se considera la serie de término general $a_n = (-1)^{n+1} 2^n (a+1)^{2n}$. Estudia su convergencia absoluta y condicional. Halla $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ para $a = -2/3$.

18. Consideremos la serie $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} n a^n$.

(a) Estudia la convergencia de la serie según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

(b) Calcula su suma, que denotamos por s, para $a = 1/2$.

(c) Sea (s_n) la sucesión de sumas parciales de la serie del apartado anterior. ¿Cuál es el valor de n que hace que $|s_n - s| < 0.1$? Compara este resultado con el apartado anterior, calculando exactamente el error.

19. Estudia el carácter de $\sum (-1)^{n+1} a_n$, siendo $a_n = \begin{cases} 1/n, & n \text{ es impar,} \\ 1/n^2, & n \text{ es par} \end{cases}$

Problemas Tema 10

Series de potencias

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Estudia la convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right) x^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$,

siendo $a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{si } n = 2k \\ 3^{-n}, & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$

2. Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^3 x^n$, calcula su radio de convergencia, su intervalo de convergencia y su suma en dicho intervalo.

3. Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$, calcula su radio de convergencia. Estudia el carácter de la serie en los extremos del intervalo de convergencia.

4. Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) x^n$, determina su radio de convergencia, estudia la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia, y calcula su suma allá donde sea convergente.

5. Calcula el radio de convergencia y la suma de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (2^{n+1} - n)x^n$.

6. Suma las series de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, en los casos:

(a) $a_n = \dfrac{n^2 + 2n + 3}{n!}$ (b) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ (c) $a_n = 3n^2 - n + 1$

7. Desarrolla en serie de potencias las funciones:

(a) $\log \dfrac{1+x}{1-x}$ (c) $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ (e) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

(b) $\arctan x$ (d) $\dfrac{x+1}{(1-x^2)^3}$ (f) $\operatorname{sen}^2 x$

8. (a) Encuentra la serie de Taylor en el origen de la función $f(x) = x\log(1+x^2)$. Estudia el intervalo de convergencia de dicha serie, y justifica en qué puntos de dicho intervalo coincide con f.

(b) Encuentra razonadamente la derivada de la serie de potencias anterior, y deduce el valor de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n4^n}.$$

(c) Aplica el Teorema de Leibnitz a la serie anterior para averiguar la suma parcial que comete un error menor que 0.1 con respecto a la suma total. Compara el resultado con el valor real obtenido en el apartado (b).

9. (a) Estudia el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n$.

(b) Encuentra el desarrollo en serie de potencias en el origen de la función $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$, indicando el intervalo de validez de la igualdad.

(c) Estudia el carácter de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2^n}$ y en caso de convergencia, calcula su valor.

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

10. Se consideran las series de potencias $\sum_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n(n+2)}$, $\sum_{n\geq 1}\dfrac{3^n(x-2)^n}{n}$. Obtén sus intervalos de convergencia, estudiando el comportamiento en los extremos. Calcula la suma en el interior del intervalo.

11. Se considera la serie de potencias $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^p}(x-2)^n$, $p \geq 0$.

(a) Determina su radio y dominio de convergencia según los valores de p.

(b) Para $p = 1$, obtener la suma en el interior del intervalo de convergencia.

12. Estudia el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1}\left(\dfrac{(-1)^n}{(n+1)2^n} - \dfrac{n}{3^n}\right)x^n$.

13. Dada la serie de potencias $\sum_{n\geq 1}\left(n^2 + \dfrac{1}{n}\right)(x-1)^n$, determina su radio de convergencia, estudia la convergencia en los extremos y halla su suma.

14. (a) Encuentra la serie de Taylor de la función $f(x) = x\cos x$. Estudia el intervalo de convergencia de dicha serie, y justifica en qué puntos de dicho intervalo coincide con f.

(b) Encuentra razonadamente la derivada de la serie de potencias anterior, y deduce el valor de la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!}.$$

15. (a) Calcula el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-n} x^n$, estudiando el comportamiento en los extremos del intervalo.

(b) Sea $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-n} x^n$. Expresa $f'(x)$ para cada x del intervalo abierto usando funciones elementales, y deduce el valor de $f'(1/2)$.

(c) Calcula f en términos de las funciones elementales.

16. Mediante el método de los coeficientes indeterminados, calcula los cinco primeros términos del desarrollo en serie de potencias de las funciones:

(a) $\tan x$ (b) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$ (c) $\dfrac{\cos x}{1-2x}$

17. Desarrolla en serie de potencias las funciones:

(a) $\log(a+bx)$ (b) $(1+e^x)^2$ (c) $\operatorname{Sh} x = (e^x - e^{-x})/2$

18. (a) Encuentra la serie de Taylor en el origen de la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$. Estudia el intervalo de convergencia de dicha serie, y justifica en qué puntos de dicho intervalo coincide con f.

(b) Encuentra razonadamente la derivada de la serie de potencias anterior, y deduce el valor de las series numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{3n-1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{2^{3n-1}}.$$

(c) ¿Cuál es el valor de la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{3n-1}$?

19. Calcula el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{3n+1}}{n 8^n}$$

y encuentra el valor de la suma en término de funciones elementales. Para $x = 2$, usa el Teorema de Leibnitz y calcula una suma parcial de la serie cuya diferencia con la suma total sea menor que 10^{-2}.

20. (a) Prueba que la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 1$ es indefinidamente derivable en el origen. Calcula $f^{(n)}(0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(b) Calcula el desarrollo en serie de potencias de una primitiva de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

21. (a) Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$, determina su radio de convergencia y estudia la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia.

(b) Sea $f(x)$ la suma de la serie anterior. Calcula f' allá donde exista, y escríbela en término de funciones elementales.

(c) Calcula una primitiva de $\dfrac{1}{1+x^3}$, y deduce una expresión para f en término de funciones elementales.

(d) Calcula razonadamente el valor de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$.

22. Sea $f(x) = \dfrac{\arctan(x^2)}{x^2}$ para $x \neq 0$. Define $f(0)$ para que sea continua, y prueba que entonces es indefinidamente derivable. Calcula $f^{(n)}(0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

23. (a) Encuentra la serie de Taylor en el origen de la función $f(x) = \frac{1}{(1+x^3)^2}$, determina su radio de convergencia, estudia la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia, y justifica en qué puntos del intervalo de convergencia coincide con f.

(b) Estudia la convergencia de la integral $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^{3n-3}}$. Determina si es convergente y usa la acotación del error que da el Teorema de Leibnitz para encontrar una suma parcial que diste menos de 10^{-2} de la suma real. Usa el apartado anterior para encontrar la suma real, y comprueba la diferencia con la suma parcial calculada anteriormente.