Clase 1: Introducción

Tutorías: Viernes 10:00-12:00
16:00-18:00

Módulo 15 (Análisis), Despacho 8

Email: egarcia12@us.es

Apuntes: Clases

Complementarios ⇝ Enseñanza virtual.

Más: Bibliografía.

Evaluación: [Leer proyecto docente]

Dos parciales + Final (1ª Convocatoria)

1ª P ← → 2º P — 11/06/2024

15/01/2024 — 27/05/2024

→ Aprobar asignatura: | Nota 1ª y 2º Parcial ≥ 4
| Media 1ª y 2º P ≥ 5

[Parcial aprobado se guarda para 1ª convocatoria].

→ Nota 1ª Parcial: Dos opciones,

1) Examen 1ª Parcial

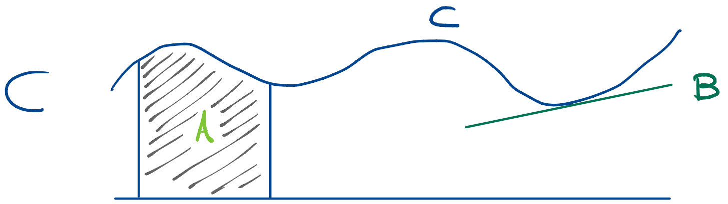
2) Prueba intermedia + Ex. 1ª Parcial
06/11/2023

↳ Si Nota Prueba Int. ≥ 5 → Se elimina materia para Ex. 1ª P.

↓ Nota 1ª Parcial = Media.

Introducción: ¿Qué es el "Cálculo"?

La asignatura puede resumirse en una imagen:



Dos problemas fundamentales:

1) Determinar un número que mida el área de la región A.

2) Determinar un número que mida la inclinación o pendiente de la recta B.

El problema 1) da lugar al Cálculo integral, y el 2) al Cálculo diferencial.

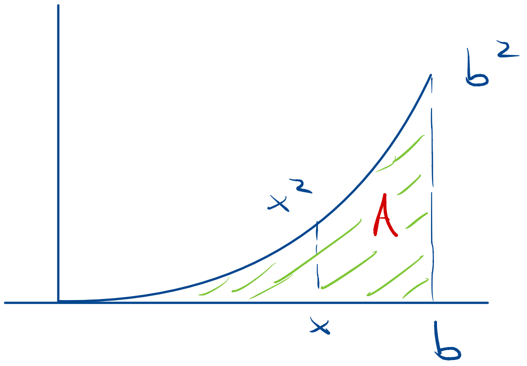
No obstante, lo interesante es el proceso por el que definimos conceptos tales como "área", "pendiente", y la multitud de conexiones y aplicaciones en otros ámbitos:

$\xrightarrow{2)}$ velocidad, variación de la temperatura, movimiento de los fluidos, o planetas, gasto de combustible según masa,...

$\xrightarrow{1)}$ cualquier proceso que requiera "sumar trocitos": cálculo de masas, volúmenes, fuerzas, energía,...

Aunque se estudian derivadas antes que integrales, históricamente el cálculo integral precede al diferencial. De hecho, el "método de exhaución" para aproximar áreas era conocido por los griegos y, más aun, Arquímedes (~250 a.C) dio fórmulas exactas para varias figuras.

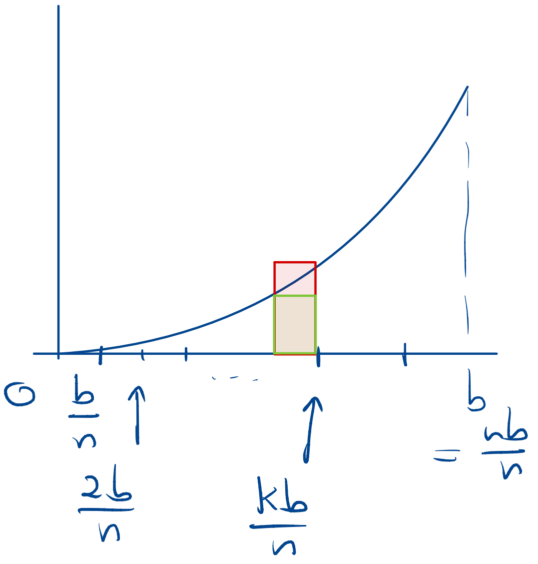
Ejemplo: Cálculo de área bajo parábola
[solo usaremos operaciones elementales]



¿Área A de la región?

Aproximamos por rectángulos.

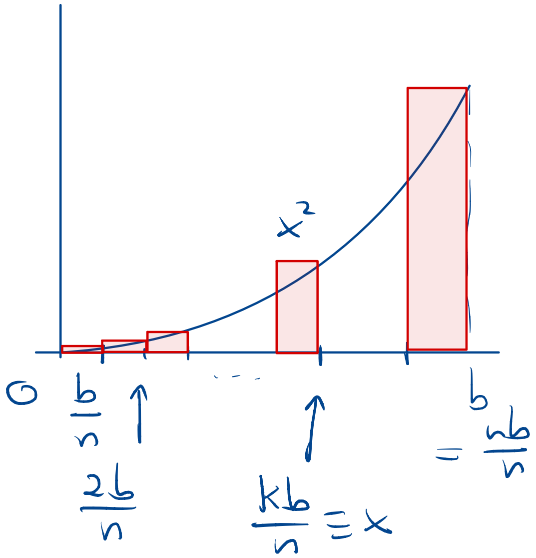
Dividimos la base en n trozos: $0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \dots, \frac{nb}{n}$



En cada punto $x = \frac{kb}{n}$, con $k = 0, 1, \dots, n$,
podemos construir un rectángulo por arriba y por abajo de la parábola:

Vemos que si sumamos el área de los triángulos rojos, obtenemos una aproximación por exceso, y análogamente por defecto con los verdes.

Calculemos primero por exceso:



Área rectángulo k:

$$\underbrace{\frac{b}{n}}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\left(\frac{bk}{n}\right)^2}_{\text{altura}} = k^2 \frac{b^3}{n^3}$$

Los sumamos: $S_n = 1^2 \frac{b^3}{n^3} + 2^2 \frac{b^3}{n^3} + \dots + n^2 \frac{b^3}{n^3} =$

$$= \frac{b^3}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \dots + n^2\right)$$

Repitiendo el proceso con los rectángulos inferiores,

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\right).$$

Tenemos de momento la aproximación $\boxed{s_n < A < S_n}$

¿$1^2 + 2^2 + \dots + n^2$? Arquímedes encontró que

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \qquad [1]$$

Nota: Veremos cómo demostrar fácilmente que [1] es cierto esta semana.

De la igualdad [1] deducimos que [ejercicio]

$$1^2+2^2+\dots+(n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1+2^2+\dots+n^2$$

$$\xrightarrow[\cdot\frac{b^3}{n^3}]{} \quad \boxed{s_n < \frac{b^3}{3} < S_n}$$

Tenemos pues que

$$s_n < A < S_n$$
$$s_n < \frac{b^3}{3} < S_n$$

para cualquier n.

Veamos que esto implica $A = \frac{b^3}{3}$!

Como $s_n = \frac{b^3}{n^3}\left(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2\right) < \frac{b^3}{3}$, entonces

$$S_n = s_n + \frac{b^3}{n^3}n^2 < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n},$$

y análogamente $s_n > \frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n}$. Por tanto,

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Concluimos probando cada caso posible:

$$\underbrace{A < \frac{b^3}{3} \quad \text{o} \quad A > \frac{b^3}{3}}_{\text{Dan lugar a una contradicción}} \quad \text{o} \quad \boxed{A = \frac{b^3}{3}}.$$

[Ejercicio. Apostol, p. 9]

Nota: Ha sido fundamental usar la fórmula para $1^2+2^2+\dots+n^2$.

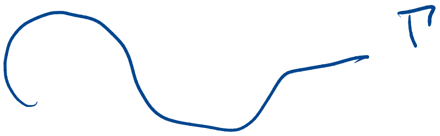
¿Qué hacer para una curva general?

Integrales

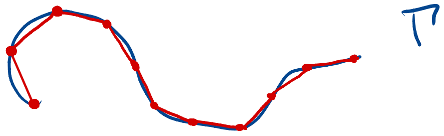
↳ Mucho más "fácil": $A=\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$.

Newton, Leibniz, ..., Cauchy, Riemann (~1850)

Pregunta: ¿Cómo calcular, o aproximar, la longitud de una curva?



Idea básica del cálculo integral: "sumar trocitos"



Aviso: Necesidad de rigor en los conceptos!

¿Qué es área? ¿Y longitud?

↳ Paradoja de la línea de costa.

Clase 2: Los números reales

Comentamos ayer que el Cálculo surge de estudiar dos problemas: determinar áreas y calcular tasas de variación (cálculo integral y diferencial, resp.)
Durante siglos, esto se hizo con mucha intuición y poco rigor, hasta la aparición de problemas y paradojas.
Por ejemplo:

1) Calcular longitud de costa.
2) ¿Existen funciones continuas sin recta tangente en ningún punto?

La necesidad de rigor da lugar a las matemáticas modernas en los siglos XIX y XX.

Números

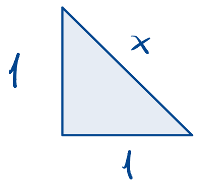
Todos entendemos intuitivamente qué son los números naturales: 1, 2, 3, ...
También nos resulta fácil pensar en los enteros, -1, -2, -3, ...,
e incluso en los racionales $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$

Pero, ¿existen más números?

La respuesta no es del todo obvia.

Por ejemplo, podemos pensar en $\sqrt{2}$. Notemos que $\sqrt{2}$ lo definimos como aquel número x tal que $x \cdot x = 2$. Pero, ¿existe tal x?

En este caso particular, sabemos que sí por el Teorema de Pitágoras:



$$\Rightarrow x \cdot x = 1 + 1 = 2$$

Nota: Faltaría ver que $\sqrt{2}$ no es racional

Pero, ¿y en general?

¿$\exists x \,/\, x \cdot x \cdot x = 3$?

En el siglo XIX se quería probar que los números reales de hecho existen.

Nosotros definiremos los números reales como un conjunto que satisface una serie de propiedades, llamadas axiomas.

• $\mathbb{R}$: Números reales

Conjunto de números con dos operaciones 1] interna (suma $+$, producto $\cdot$), un orden 2] $(<, >, =)$ y "completo" 3].

Axiomas (Propiedades)

1] De la suma y producto:

1) Suma asociativa: $(x+y)+z = x+(y+z)$
2) Suma conmutativa: $x+y = y+x$
3) Producto asociativo: $(x \cdot y)\cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
4) Producto conmutativo: $x \cdot y = y \cdot x$
5) $\exists$ elemento neutro para la suma: $x + 0 = x$
6) $\exists$ elemento opuesto para la suma: $x + (-x) = 0$
7) " " neutro " el producto: $x \cdot 1 = x$
8) " " inverso " " " : $x \cdot (x^{-1}) = 1 \; (x \neq 0)$
9) Distributiva: $(x+y)\cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

2] De orden:

1) Tricotomía: Dado $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$x < 0 \quad \text{o} \quad x > 0 \quad \text{o} \quad x = 0.$$

2) Suma: $x>0,\ y>0 \Rightarrow x+y>0$

3) Producto: $x>0,\ y>0 \Rightarrow x\cdot y>0$

Otras propiedades: [se pueden deducir de 1)-2)-3)]

- $x<y \Rightarrow x+z<y+z$
- $x<y,\ z>0 \Rightarrow x\cdot z<y\cdot z$
  $x<y,\ z<0 \Rightarrow x\cdot z>y\cdot z$
- $\left.\begin{array}{l} 0<a<b \\ 0<c<d \end{array}\right| \Rightarrow 0<a\cdot c<b\cdot d$
- $z\neq 0 \Rightarrow z^2>0$

Esta propiedades nos permiten resolver las inecuaciones.

Recordamos también la función <u>valor absoluto</u>:

- <u>Def.</u>: <u>Valor absoluto</u>

$$|\cdot|: \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$$
$$x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x\geq 0, \\ -x & \text{si } x<0, \end{cases}$$

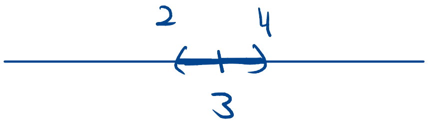
que nos sirve para medir distancias en $\mathbb{R}$.

Ej: $|x-3|<1$ = "Punto x que distan de 3 menos que 1"

En efecto, resolvemos la inecuación:

Si $x-3 \geq 0$: $x-3 < 1 \Rightarrow x < 4$

$x-3 < 0$: $3-x < 1 \Rightarrow x > 2$



Es decir, $|x-3| < 1 \Leftrightarrow x \in (2,4)$

- **Propiedades:** $|x| \geq 0$ y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

  $|x \cdot y| = |x||y|$

  $|x+y| \leq |x|+|y|$ (desig. triangular)

  $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$ (triangular inversa)

- **Ejercicio:** Resolver la inecuación

  $|x-1|+|x+1| < 4$.

Sol:

Si $x-1 \geq 0$: Si $x+1 \geq 0$: $2x < 4 \Rightarrow x < 2 \rightarrow [1,2)$

[Si $x+1<0$: No es posible]

Si $x-1 < 0$: Si $x+1 \geq 0$: $-x+1+x+1 = 2 < 4 \rightarrow [-1,1)$

Si $x+1 < 0$: $-x+1-x-1 = -2x < 4 \Rightarrow x > -2$

$\hookrightarrow (-2,-1)$

Por tanto,

$|x-1|+|x+1| < 4 \Leftrightarrow x \in (-2,2)$.

- Hemos visto los axiomas de la suma y producto, y de orden. Nos queda el axioma que distingue a $\mathbb{R}$ principalmente y lo hace "completo".

Para enunciarlo, necesitamos recordar ciertas definiciones.

- **Def.:** Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es cota superior de A si

  para todo $a \in A$ se tiene que $a \leq \alpha$.

- **Def.:** $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente si tiene alguna cota superior.

- **Def.:** Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo de $A \subset \mathbb{R}$ si:
  1) α es cota superior de A.
  2) α es menor o igual que cualquier cota superior de A.

Es decir, el supremo de A es la menor de sus cota superiores.

[← Fin clase 2]

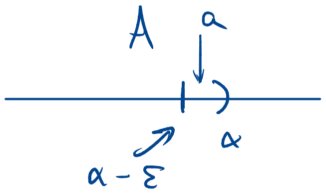
Ej.: $\} 1, 3, 5 \{ = A$

Cualquier número $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 5$ es cota superior de A.
Claramente, $x = 5$ es la mínima de ellas. Es decir,

$$\sup A = 5.$$

Nota: Definición equivalente de supremo.

$\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo de A si:



1) Es cota superior.

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \,/\, a > \alpha - \varepsilon$.

Dicho de otra forma, si $\alpha = \sup A$, entonces para cualquier $x < \alpha$ podemos encontrar $a \in A$ tal que $x < a \leq \alpha$.

3] Axioma del supremo: Si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente, entonces A tiene supremo.

Nota: Este axioma es el que permite deducir la existencia de números como $\sqrt[3]{2}$.

¿$\exists x \in \mathbb{R} \,/\, x^3 = 2$?

↳ $A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \leq 2\} \neq \emptyset$ y acotado superior., luego A tiene supremo, $\sup A = \beta$.

Faltará demostrar que $\beta^3 = 2$ [Ejercicio opcional].
[Red. Ab.]

→ Todo lo anterior se enuncia análogamente para el ínfimo.

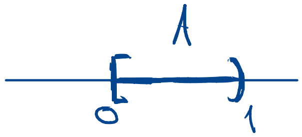
Finalmente definimos máximo (y análogamente mínimo):

- **Def:** $\underline{M \in A} \subset \mathbb{R}$ es el máximo de A si cualquier $a \in A$ cumple $a \leq M$.

Nota: A diferencia del supremo, el máximo de un conjunto debe pertenecer a dicho conjunto.

- **Ejemplos / ejercicio:** Determinar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

1) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$



$\sup A = 1$, $\inf A = 0$

Como $\inf A = 0 \in A \rightarrow \min A = 0$.

Sin embargo, $\sup A = 1 \notin A \rightarrow$ A $\underline{\text{no}}$ tiene máximo.

Nota: ¿Por qué A no tiene máximo?

Supongamos que sí y llamémoslo x. Como es un máximo, $x \in A$, luego $x < 1$. Pero entonces vemos que $0 < \frac{x+1}{2} < 1$, luego $\frac{x+1}{2} \in A$, y además $x < \frac{x+1}{2}$; esto contradice que x fuese cota sup. ⨳.

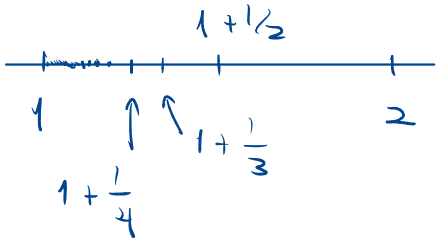
2) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$

$\sup B = \sqrt{2}$, $\inf B = -\sqrt{2}$.

Como $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (y por tanto $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \notin B$), B no tiene máx. ni mín.

3) $C = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ con } x = 1 + \frac{1}{n}\}$

$C = \{2, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, \dots\}$



Claramente,

$\sup C = 2 = \max C$.

Además, podemos deducir que $\inf C = 1$, y como $1 \notin C$, no tiene mínimo.

⌈ ¿$\inf C = 1$? Supongamos que no: $\inf C = \lambda$.

Como 1 es cota inferior, necesariamente $\lambda \geq 1$; y como suponemos $\lambda \neq 1$, tenemos $\lambda > 1$.

Entonces, $\lambda - 1 > 0$. Si tomamos $n > \frac{1}{\lambda - 1}$, obtenemos que $1 + \frac{1}{n} < \lambda$, contradiciendo que $\lambda = \inf C$ ↯. (dejado como ejercicio)

⌋

Clase 3 : Números naturales. Inducción.

- $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots \longrightarrow$ No están acotados.

- Propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$:

Dados $y \in \mathbb{R}$, $0 < x \in \mathbb{R}$, entonces $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$.

→ Es decir, dado un segmento (arbitrariamente grande), y una regla (da igual cómo de pequeña), siempre puedo medir el primero colocando la regla consecutivamente un número finito de veces.

- Principio de inducción:

Ejemplo/ejercicio: Demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple la igualdad siguiente,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución: Podríamos probar casos particulares:

$$n = 1 \longrightarrow 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \quad ✓$$

$$n = 2 \longrightarrow 1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} \quad ✓$$

$n=3 \longrightarrow 1+2+3=6=\frac{3\cdot 4}{2}$ ✓

⋮

pero como los naturales "no se terminan", nunca lo habremos demostrado para cualquier n.

Idea: Supongamos que la igualdad es cierta para $n=m\in\mathbb{N}$ [cosa que no sabemos].

[*] Si bajo esto supuesto somos capaces de demostrar que entonces también se cumple para $n=m+1$, habremos concluido.

¿Por qué?

Sabemos que para $n=1$ es cierta [lo hemos comprobado]

Pero entonces, por [*],

también es cierta para $n=2$.

Esto a su vez implica (por [*]) que se cumple para $n=3$, ... y así sucesivamente.

Lo aplicamos al ejercicio:

1) La igualdad es cierta para $n=1$: $1=\frac{1\cdot 2}{2}$ ✓.

2) Demostremos que si es cierta para

$n = m$, también ha de serlo para $n = m+1$:

→ Hipótesis: $1+2+\dots+m = \dfrac{m(m+1)}{2}$.

→ Objetivo: ¿ $1+2+\dots+m+(m+1) = \dfrac{(m+1)\big((m+1)+1\big)}{2}$?

Calculamos:

$$\underbrace{1+2+\dots+m}+(m+1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usando hipót.}}}{=} \frac{m(m+1)}{2} + m+1 = \frac{m(m+1)+2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad /\!/.$$

- Resumimos el método de demostración por inducción:

(p. ej., la igualdad anterior)

Inducción matemática.

Dada una afirmación $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$, para demostrar que es cierta para cada $n \geq n_1$, basta con:

1) Probar que $A(n_1)$ es cierta,

2) Probar que si $A(k)$ es cierta (con $k \geq n_1$ cualquiera), entonces $A(k+1)$ también.

Nota: n_1 suele ser 1.

Ejercicio: Demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo número real $x > -1$, se cumple que

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

[← Fin clase 3]

Sol.:

- Caso base: $n = 1 \rightarrow (1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$ ✓

- Hipótesis de inducción: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

- Demostrar que si n, entonces $n+1$:

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}(1+x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hip. Ind.}}}{\geq} (1+nx)(1+x) =$$

$$= 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x \,//.$$

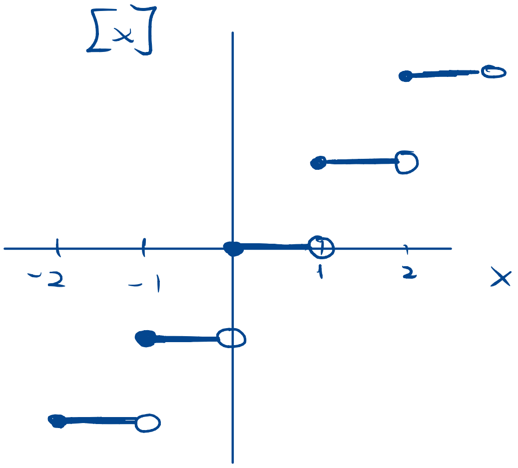
Def.: Números enteros: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$

Parte entera de $x \in \mathbb{R}$, $[x]$: Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \leq x < k+1$.

Esto es, llamamos parte entera de x, $[x]$, al entero menor que x más próximo.

Ej.: $[2.3] = 2$, $[2.7] = 2$, $[-2.2] = -3$

Vemos que $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es una función escalonada:



Def: Números racionales: $\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$

Propiedad: $\mathbb{Q}$ es "denso" en $\mathbb{R}$, esto es,

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, $\exists p \in \mathbb{Q} \, / \, x < p < y$.

- **Def:** Irracionales: $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

¿Es $\mathbb{I} = \emptyset$? No: por ejemplo, veamos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

→ Dem. por reducción al absurdo:

Supongamos $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Entonces $\exists p, q \in \mathbb{N}$ sin factores comunes tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (consideramos la fracción simplificada).

Por definición, $(\sqrt{2})^2 = 2$, esto es, $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Así,

$p^2 = 2q^2$. (*)

Tenemos entonces que p^2 es par, y por tanto p es par. Esto es,

$\exists k \in \mathbb{N} / \ p = 2k$.

Volviendo a (*), tenemos que $(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ es par $\Rightarrow q$ es par.

Pero si p y q son pares, ambos son divisibles por 2 $\rightarrow\leftarrow$ contradicción //

Ejercicios: 1.a), 9)

3.h)

8.a)

10.e)

11.e)

1. $\mathbb{Q}$ = racionales, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irracionales.

a)

a.1) $\left.\begin{array}{l} a \in \mathbb{Q} \\ b \in \mathbb{I} \end{array}\right\} \Rightarrow a+b \in \mathbb{I}$?

Es cierto. Lo demostramos por reducción al absurdo:

Sean $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{I}$. Suponemos $a+b \in \mathbb{Q}$, es decir, que $\exists p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ tales que

$$a+b = \frac{p}{q}.$$

Como $a \in \mathbb{Q}$, $\exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \,/\, a = \frac{m}{n}$. Por tanto,

$$b = (a+b) - a = \frac{p}{q} - \frac{m}{n} = \frac{pn - mq}{qn}.$$

Como $pn - mq \in \mathbb{Z}$, $qn \in \mathbb{N}$, concluimos que $b \in \mathbb{Q}$, que contradice que $b \in \mathbb{I}$. Por tanto, la hipótesis de partida $a+b \in \mathbb{Q}$ es falsa. Esto es, $a+b \in \mathbb{I}$.

a.2) $a \in \mathbb{I}, b \in \mathbb{I} \Rightarrow a+b \in \mathbb{I}$?

Es falso. Contraejemplo: $a = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{2}$.

$\boxed{9.}$ $\exists\, x,y \in \mathbb{I} \,/\, x^y \in \mathbb{Q}$?

[Hacer en clase 5]

Sí. Ejemplo: Llamamos $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. No sabemos si $a \in \mathbb{Q}$ o $a \in \mathbb{I}$.

Si $a \in \mathbb{Q}$, hemos terminado (pues $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$).

Si $a \in \mathbb{I}$, entonces tenemos que

$$a^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \in \mathbb{Q}.$$

$\boxed{3.}$

h) $|2x-3| - 2|x| = 3$

- Si $x \geq 0$: Si $2x-3 \geq 0$: $2x-3-2x = 3 \Leftrightarrow -3 = 3 \nrightarrow$.

  Si $2x-3 < 0$: $3-2x-2x = 3 \Leftrightarrow x = 0$.

- Si $x < 0$: Si $2x-3 \geq 0$: $2x-3+2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \not< 0$.

  Si $2x-3 < 0$: $3-2x+2x = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$.

Por tanto, infinitas soluciones. El conjunto S de soluciones es:

$$S = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2x-3 < 0\}$$

Esto es,

$$S = \{0\} \cup \left(-\infty, \frac{3}{2}\right).$$

[← Fin clase 4]

8.

a) $A = \}x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x-1}{x-2} > 0,\ x > -1\{$

$A = \}x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x-2} > 0\{ \cap \}x \in \mathbb{R} : x > -1\{$.

Desarrollamos el primero:

- Si $x-2>0$: $\dfrac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$
- Si $x-2<0$: $\dfrac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1$

Así,

$\}x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x-2} > 0\{ = (2,\infty) \cup (-\infty,1)$,

por lo que

$A = \}(2,\infty) \cup (-\infty,1)\{ \cap (-1,\infty) = (-1,1) \cup (2,\infty)$.

$A = (-1,1) \cup (2,\infty) \Rightarrow$ No tiene supremo.

$\inf A = -1$, no tiene mínimo.

10.

e) $x^3 - x^2 - 5x - 3 \leq 0$

Tenemos que factorizar el polinomio.

Vemos que $x=-1$ es una raíz.

Por tanto, $p(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = g(x)(x+1)$.

Hallamos $g(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & -5x & -3 & x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & & & x^2-2x-3 \\ \cline{1-4}
 & -2x^2 & -5x & -3 & \\
 & 2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-4}
 & & -3x & -3 & \\
 & & 3x & +3 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Así, $p(x) = (x^2-2x-3)(x+1)$. Factorizamos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2 \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = (x-3)(x+1)^2.$$

Por tanto, $x^3 - x^2 - 5x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)^2 \leq 0$.

- Si $x \neq -1$, $(x+1)^2 > 0$. Por tanto,

  $(x-3)(x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Como $x=-1$ satisface también la inecuación, concluimos

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

$\boxed{11.}$

e) Demostrar para $n \in \mathbb{N}$: [Binomio de Newton]

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Notas previas: Números combinatorios

Def.: Factorial

$$n! = n(n-1)\cdot(n-2)\dots 2\cdot 1 \quad (n! \equiv n \text{ factorial})$$

$$0! = 1.$$

Ejemplo: $2! = 2\cdot 1 = 2$, $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$, $4! = 24, \dots$

Nota: $n! = n\,\underbrace{(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1} = n\cdot(n-1)!$

Def.: Números combinatorios

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \rightsquigarrow \text{"n sobre k"} \quad (\text{"n choose k"})$$

Nota: $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}.$$

Identidad de Pascal: Para $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Dem.: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$,

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

Por tanto,

$n! = n\cdot(n-1)!$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} = (n-1)!\left[\frac{1}{(k-1)!\,(n-k)!}+\frac{1}{k!\,(n-1-k)!}\right] =$$

$$= (n-1)!\left[\frac{1}{(k-1)!\,(n-k)\cdot(n-k-1)!}+\frac{1}{k\cdot(k-1)!\,(n-1-k)!}\right] =$$

$$= (n-1)!\,\frac{\cancel{k}+n-\cancel{k}}{k\,(k-1)!\,(n-k)(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad //$$

- Podemos ya probar el Binomio de Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}, \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

- Caso base: $n=1$: $x+y = \underbrace{\binom{1}{0}}_{=1} x^0 \underbrace{y^1}_{y} + \underbrace{\binom{1}{1}}_{=1}\underbrace{x^1}_{x} y^0$ ✓

- Hip. Ind: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

- Objetivo: Usando Hip. Ind, probar que

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.$$

Calculamos:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} =$$

Identidad de Pascal

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + \overbrace{\binom{n+1}{0}}^{=1} y^{n+1} + \overbrace{\binom{n+1}{n+1}}^{=1} x^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} + x^{n+1} =$$

$(k \to k-1)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} + x^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} + \overset{k=0}{\boxed{y^{n+1}}} + \underset{k=n}{\boxed{x^{n+1}}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} \right) (x+y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hip. Ind.}}}{=} (x+y)^{n} (x+y) \,//$$