

Clase 5: Ejercicios.

8.

$$a) A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x-2} > 0, x > -1\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x-2} > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$$

Desarrollamos el primero:

$$\bullet \text{ Si } x-2 > 0 : \frac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\bullet \text{ Si } x-2 < 0 : \frac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Así,

$$\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x-2} > 0\} = (2, \infty) \cup (-\infty, 1),$$

por lo que

$$A = \{(2, \infty) \cup (-\infty, 1)\} \cap (-1, \infty) = (-1, 1) \cup (2, \infty).$$

$$A = (-1, 1) \cup (2, \infty) \Rightarrow \text{No tiene supremo.}$$

$$\inf A = -1, \text{ no tiene mínimo.}$$

10.

$$e) x^3 - x^2 - 5x - 3 \leq 0$$

Tenemos que factorizar el polinomio.

Vemos que $x = -1$ es una raíz.

Por tanto, $p(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = g(x)(x+1)$.

Hallamos $g(x)$:

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 5x - 3 \\ -x^3 - x^2 \\ \hline -2x^2 - 5x - 3 \\ 2x^2 + 2x \\ \hline -3x - 3 \\ 3x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} x+1 \\ \hline x^2 - 2x - 3 \end{array}$$

Así, $p(x) = (x^2 - 2x - 3)(x+1)$. Factorizamos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = 1 \pm 2 \begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = (x-3)(x+1)^2.$$

Por tanto, $x^3 - x^2 - 5x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)^2 \leq 0$.

• Si $x \neq -1$, $(x+1)^2 > 0$. Por tanto,

$$(x-3)(x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Como $x = -1$ satisface también la inecuación, concluimos

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

11.

e) Demuestra para $n \in \mathbb{N}$: [Binomio de Newton]

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Notas previas: Números combinatorios

Def: Factorial

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \quad (n! \equiv n \text{ factorial})$$

$$0! = 1.$$

$$\text{Ejemplo: } 2! = 2 \cdot 1 = 2, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \quad 4! = 24, \dots$$

$$\text{Nota: } n! = n \underbrace{(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}_{(n-1)!} = n \cdot (n-1)!$$

Def: Números combinatorios

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \begin{array}{l} \sim \text{"n sobre k"} \\ \text{"n choose k"} \end{array}$$

$$\text{Nota: } \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n.$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}.$$

Identidad de Pascal: Para $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Dem.: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!},$

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

Por tanto,

$$n! = n \cdot (n-1)! \quad \text{---}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = (n-1)! \left[\frac{1}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{k!(n-1-k)!} \right] =$$

$$= (n-1)! \left[\frac{1}{(k-1)!(n-k) \cdot (n-k-1)!} + \frac{1}{k \cdot (k-1)!(n-1-k)!} \right] =$$

$$= (n-1)! \frac{k + n - k}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} //$$

• Podemos ya probar el Binomio de Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

• Caso base: $n=1$: $x+y = \underbrace{\binom{1}{0}}_{=1} \underbrace{x^0}_{=1} \underbrace{y^1}_{=y} + \underbrace{\binom{1}{1}}_{=1} \underbrace{x^1}_{=x} \underbrace{y^0}_{=1} \checkmark$

• Hip. Ind: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

• Objetivo: Usando Hip. Ind, probar que

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

Calculamos:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} =$$

Identidad de Pascal

$$= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + \overbrace{\binom{n+1}{0}}^{=1} y^{n+1} + \overbrace{\binom{n+1}{n+1}}^{=1} x^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} + x^{n+1} =$$

$(k \rightarrow k-1)$

$$= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} + x^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} + \underbrace{y^{n+1}}_{k=0} + \underbrace{x^{n+1}}_{k=n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} = \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} \right) (x+y) \underset{\text{Hip. Ind.}}{=} (x+y)^n (x+y)
\end{aligned}$$

Tema 2: Funciones

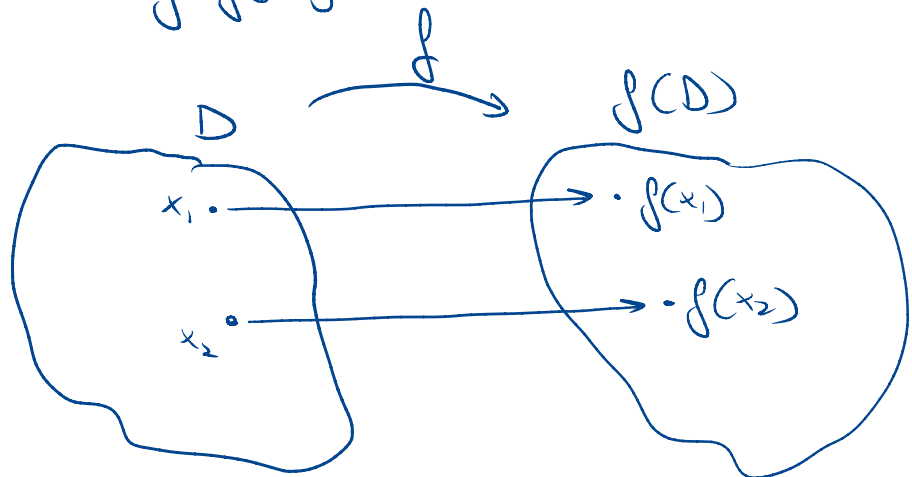
Def. Función (real de variable real)

Aplicación que a cada número x de un conjunto $D \subset \mathbb{R}$ le asigna un único número $y \in \mathbb{R}$.

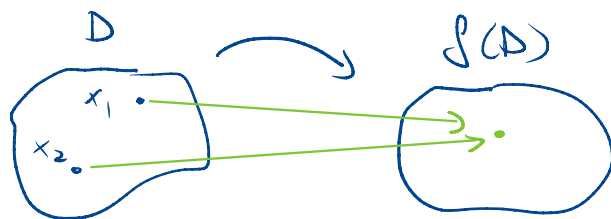
Se denota

$$\left. \begin{aligned} f: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned} \right\}$$

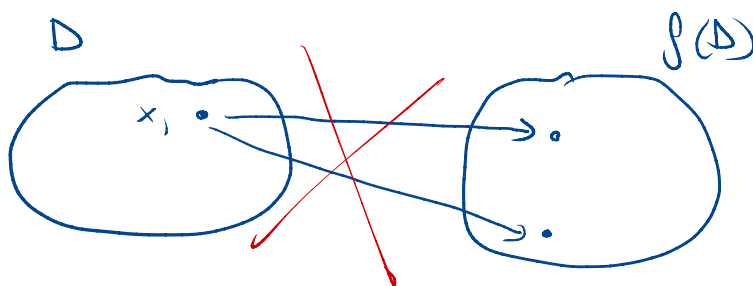
x	$f(x)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$



Nota:



✓ Puede ocurrir
 $f(x_1) = f(x_2)$



✗ Una función
 asigna un único
 valor a los puntos.

- Al conjunto de partida D se le llama dominio:

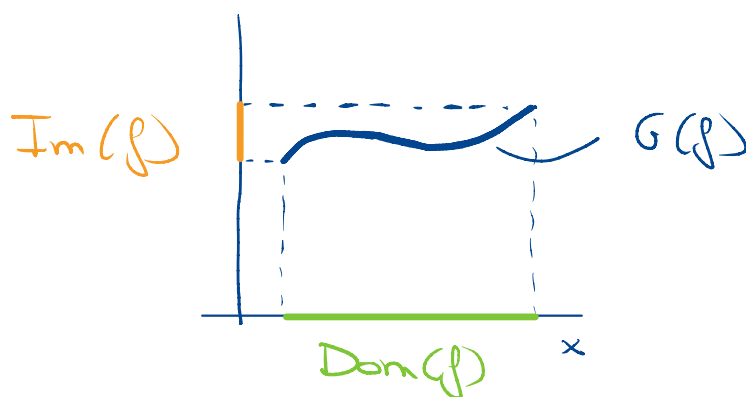
$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists f(x) \in \mathbb{R}\}$$

- El conjunto de llegada se llama imagen o rango de f ,

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \text{Dom}(f) \text{ con } y = f(x)\}$$

- Se llama gráfica o grafo de f al conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{Dom}(f)\}$$



• Ejemplo: $g(x) = \frac{x+5}{x-2} \rightarrow \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

¿ $\text{Im}(g)$?

$\hookrightarrow y \in \text{Im}(g)$ si $\exists x \in \text{Dom}(g) / y = g(x)$.

Dado $y \in \mathbb{R}$, comprobamos si existe algún $x /$

$y = g(x)$:

$$y = \frac{x+5}{x-2} \Leftrightarrow y(x-2) = x+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) = 5+2y \begin{cases} \rightarrow \text{Si } y=1, \nexists x. \\ \rightarrow \text{Si } y \neq 1, x = \frac{5+2y}{y-1} \end{cases}$$

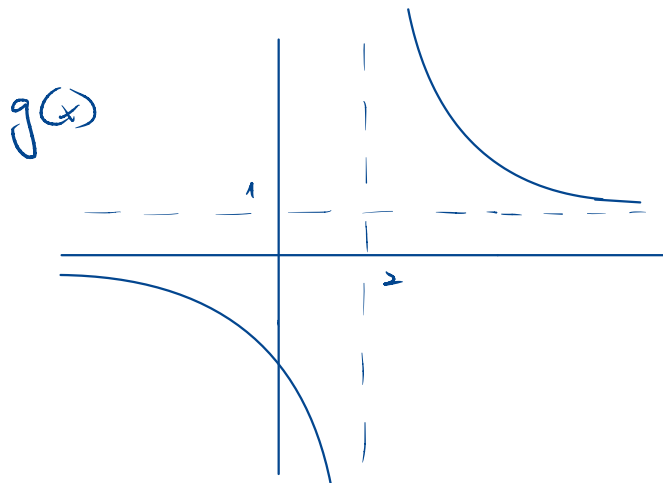
Si $y \neq 1$, $x = \frac{5+2y}{y-1}$

cumple que $y = g(x)$.

Por tanto,

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$\rightarrow$ Podemos visualizarlo con la gráfica:



Nota: Dos funciones f y g son iguales si:

→ 1) $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$

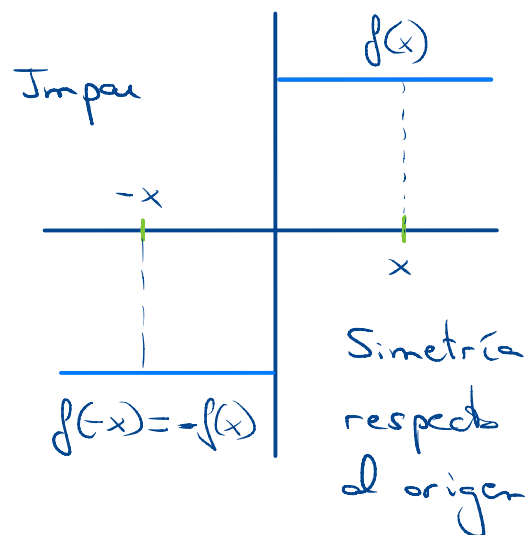
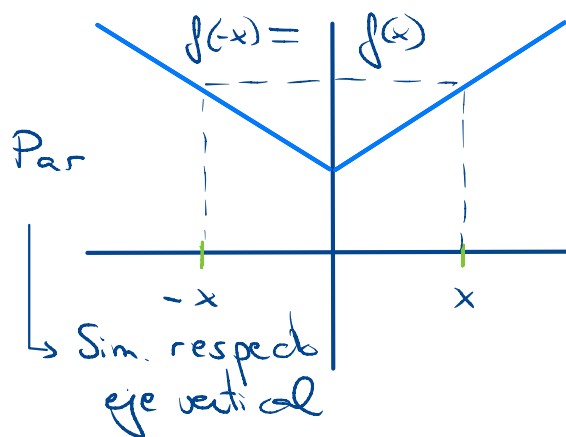
2) $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$.

• Propiedades

1) Simetría:

→ f es par si $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$.

→ f es impar si $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$.



• Ejercicio: Determinar si $f(x) = |x+1| - |x-1|$ es par o impar.

Sol:

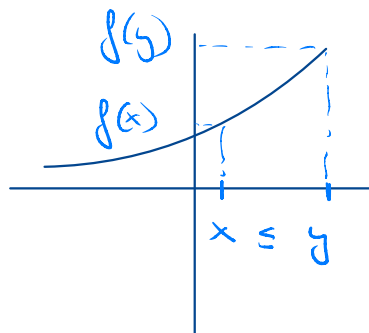
$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x+1| - |-x-1| = |-(x-1)| - |-(x+1)| = \\ &= |x-1| - |x+1| = -(|x+1| - |x-1|) = -f(x) \end{aligned}$$

Es impar.

2) Crecimiento ("monotonía")

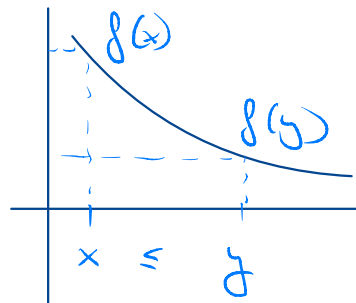
• f es creciente en $A \subset \text{Dom}(f)$ si

$$\forall x, y \in A, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$



• f es decreciente en $A \subset \text{Dom}(f)$ si

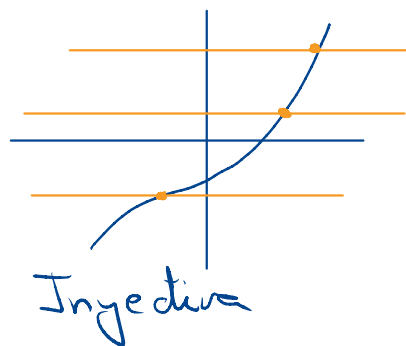
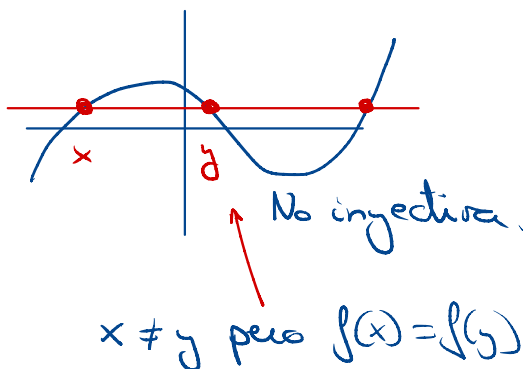
$$\forall x, y \in A, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$



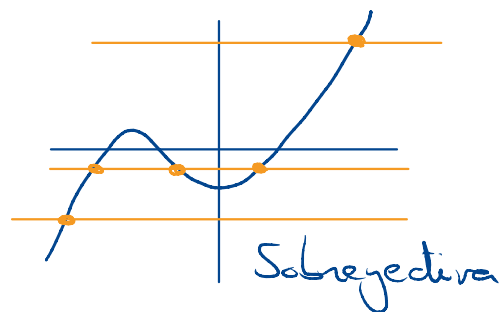
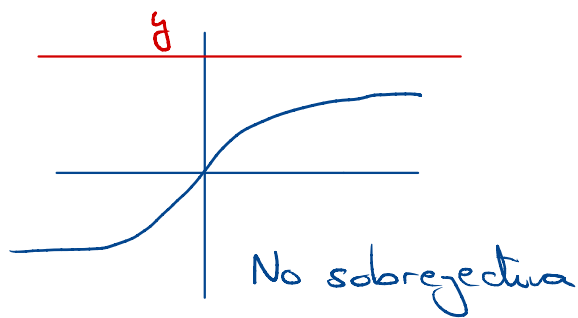
Nota: Si $< \cdot >$, se dice estrictamente creciente o decreciente.

3) Función inyectiva: Aquella que cumple que

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$



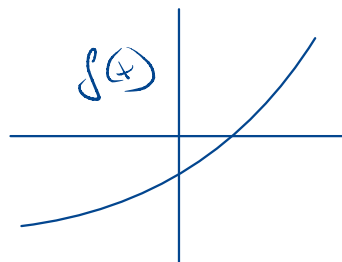
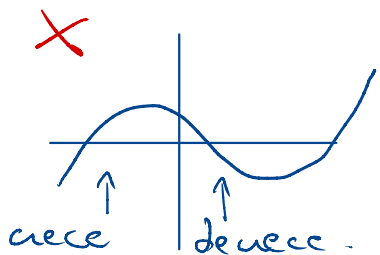
4) Función sobreyectiva: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$



$$\exists x \in \text{Dom}(f) / f(x) = y$$

5) Función biyectiva: inyectiva y sobreyectiva.

Nota: Si $f: A \subset \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente o decreciente en A , entonces es inyectiva en A .



• Operaciones con funciones:

1) Algebraicas: suma, resta, producto, cociente

$$f + g: \underline{\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)} \rightarrow \mathbb{R}$$

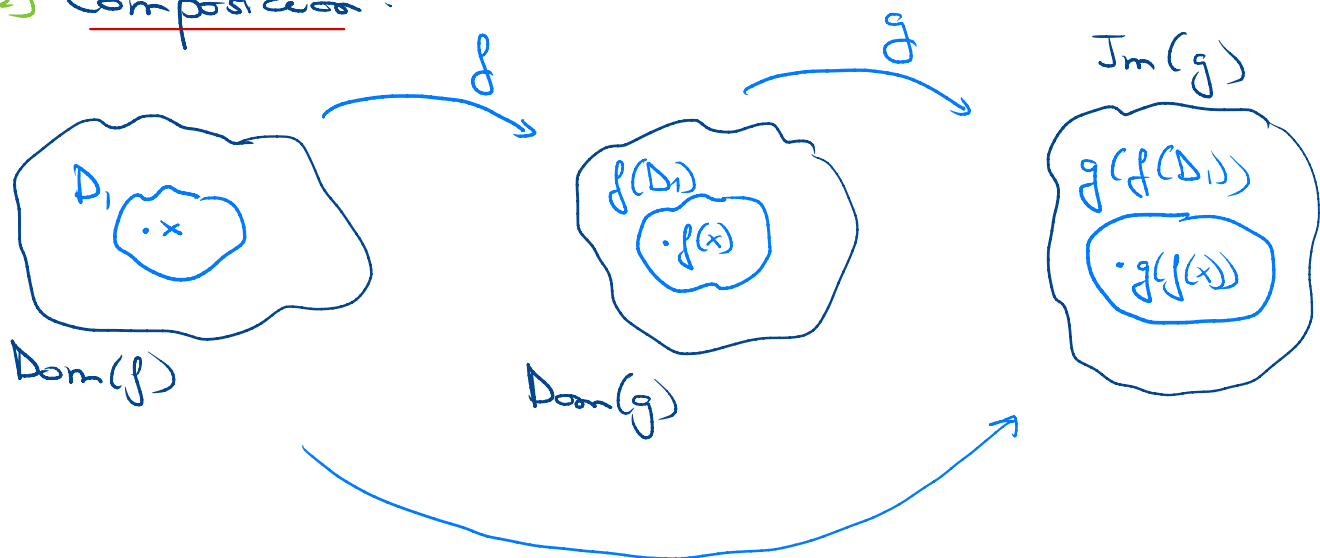
$$x \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Para definir $f+g, f \cdot g, f/g, \dots$ tanto f como g deben estar definidas (por eso intersección).

¿ $\text{Dom}(f/g)$?

$$\hookrightarrow \text{Dom}(f/g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \setminus \{x \in \text{Dom}(g) : g(x) = 0\}$$

2) Composición:



$$g \circ f$$

↑ "Primero actúe f ,
luego g "

Dadas f y g , se define

$$\left. \begin{aligned} g \circ f: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{donde } D = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) \in \text{Dom}(g)\}$$

Nota: la composición NO es conmutativa,

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

• Ejemplo: $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $g(x) = x^2 + 5x$.

$$\text{¿ } f \circ g? \text{ ¿ } g \circ f?$$

Sol:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \text{ Dom}(g) = \mathbb{R}.$$

$$1) g \circ f: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \mapsto g(f(x)) \end{array} \right.$$

$$\text{Calculamos } g(f(x)) = g\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + 5x.$$

$$2) f \circ g \rightarrow \text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq -1\}$$

$$\text{Vamos que } g(x) = x^2 + 5x = -1 \Leftrightarrow$$

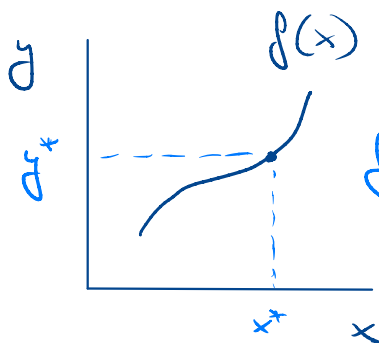
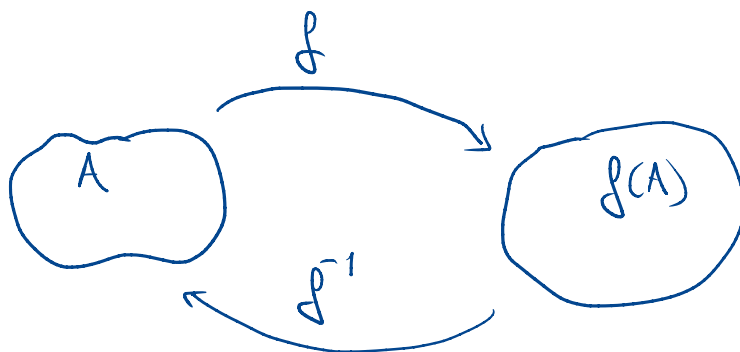
$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4}}{2}$$

Es decir,

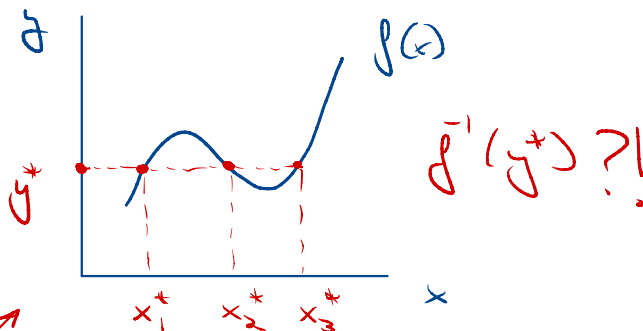
$$\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \right\}.$$

$$\text{Calculamos } f(g(x)) = f(x^2 + 5x) = \frac{1 - (x^2 + 5x)}{1 + (x^2 + 5x)}.$$

3) Inversa:



(f injectiva)



(f no injectiva)

En este ejemplo, no podemos definir f^{-1} en todo el dominio de f .

"existe una única"

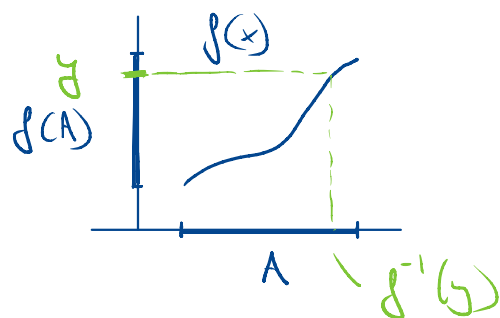
Teorema: Si $f: A \subset \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva (en A), entonces $\exists!$ función g definida en $f(A)$ tal que

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in f(A).$$

Def: Dada f inyectiva, $f: A \subset \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, se define su inversa f^{-1} como

$$\left. \begin{aligned} f^{-1}: f(A) &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = x \text{ con } f(x) = y \end{aligned} \right\}$$

Nota: El dominio de f^{-1} es la imagen de f .
 La imagen de f^{-1} es el dominio de f .



Nota: Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $x=y$.

En efecto,

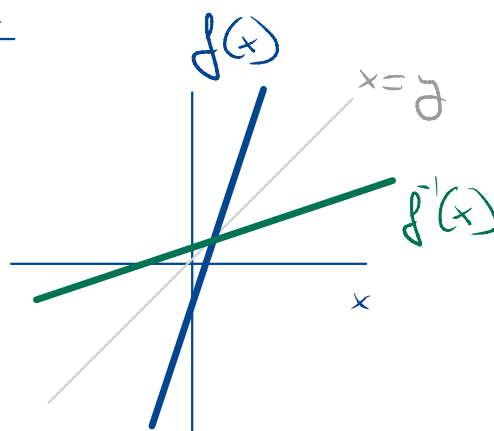
(a, b) punto de la gráfica de $f \Rightarrow b = f(a) \Rightarrow a = f^{-1}(b) \Rightarrow (b, a)$ es un punto de la gráfica de f^{-1} .

• Ejemplo: $f(x) = 3x - 1$, ¿ f^{-1} ?

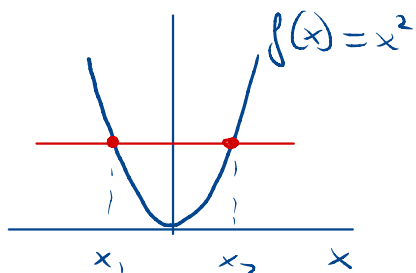
$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

$$y = f(x) = 3x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1+y}{3}$$

$$\text{Esto es, } f^{-1}(y) = \frac{1+y}{3}.$$



• Ejemplo: $f(x) = x^2$, ¿ f^{-1} ?

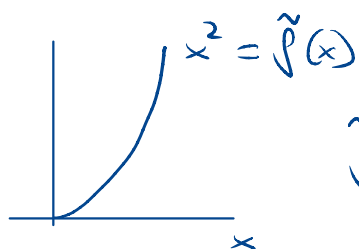


→ No es inyectiva:

Dado $y > 0$, siempre hay dos valores de x / $f(x) = y$. !!

Si restringimos la función para $x \geq 0$, es decir, si definimos

$$\tilde{f}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} x \mapsto x^2 \end{array} \right.$$



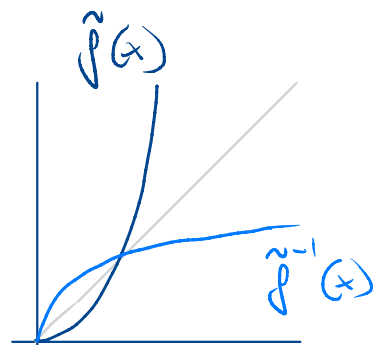
$\tilde{f}$ es inyectiva

podemos definir su inversa:

$$\tilde{f}^{-1}(y) = x \iff y = \tilde{f}(x) \quad (\text{con } x \geq 0).$$

Esto es, $y = \tilde{f}(x) = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y}$.

$$\text{Luego } \tilde{f}^{-1}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$$



Funciones elementales

• Ejercicio: $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$, ¿ f^{-1} ?

Sol:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \text{Im}(f) = (0, 1)$$

Por tanto, $\text{Dom}(f^{-1}) = (0, 1)$. Calculamos f^{-1} :

Sea $y \in (0, 1)$,

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) = \frac{2^x}{1+2^x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + 2^x y = 2^x \Leftrightarrow 2^x (y-1) = -y \Leftrightarrow 2^x = \frac{y}{1-y}$$

Como $y \in (0, 1)$, se tiene que $\frac{y}{1-y} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \log_2 \left(\frac{y}{1-y} \right).$$

Es decir, $f^{-1}: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \log_2 \left(\frac{x}{1-x} \right).$$

Nota: Usando $\ln$:

$$\ln 2^x = \ln \left(\frac{y}{1-y} \right) \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{\ln \left(\frac{y}{1-y} \right)}{\ln 2}$$

"
 $\times \ln 2$

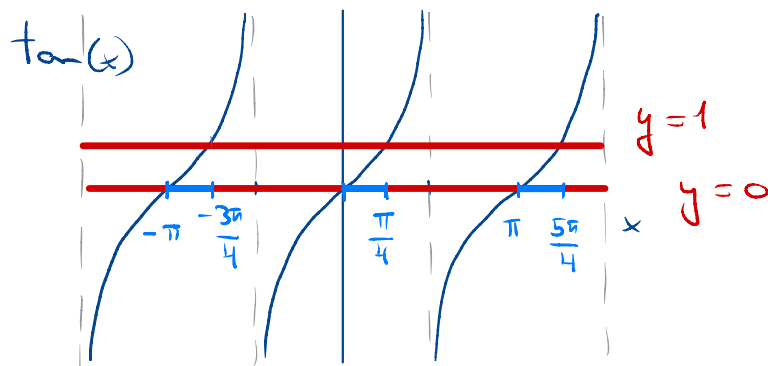
- Ejercicio: Si: $\text{Dom}(f) = [0, 1]$, ¿cuál es el dominio de la función $f(\tan(x))$?

Sol: Denotamos $g(x) = f(\tan(x))$. Entonces,

$$\begin{aligned}\text{Dom}(g) &= \{x \in \mathbb{R} : \tan(x) \in \text{Dom}(f)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \tan(x) \in [0, 1]\}\end{aligned}$$

Sabemos que $\tan(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$



Concluimos que

$$\text{Dom}(g) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right)$$

