

TEMA 1: Soluciones

1. $\mathbb{Q} \equiv$ racionales, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irracionales.

a)

$$a.1) \left. \begin{array}{l} a \in \mathbb{Q} \\ b \in \mathbb{I} \end{array} \right\} \Rightarrow a+b \in \mathbb{I} ?$$

Es cierto. Lo demostramos por reducción al absurdo:

Sean $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{I}$. Suponemos $a+b \in \mathbb{Q}$, es decir, que $\exists p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ tales que

$$a+b = \frac{p}{q}.$$

Como $a \in \mathbb{Q}$, $\exists m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ / $a = \frac{m}{n}$. Por tanto,

$$b = (a+b) - a = \frac{p}{q} - \frac{m}{n} = \frac{pn - mq}{qn}.$$

Como $pn - mq \in \mathbb{Z}$, $qn \in \mathbb{N}$, concluimos que $b \in \mathbb{Q}$, que contradice que $b \in \mathbb{I}$. Por tanto, la hipótesis de partida $a+b \in \mathbb{Q}$ es falsa. Esto es, $a+b \in \mathbb{I}$.

a.2) $a \in \mathbb{I}, b \in \mathbb{I} \Rightarrow a+b \in \mathbb{I}?$

Es falso. Contraejemplo: $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$.

b) $\left. \begin{array}{l} a \in \mathbb{Q} \\ b \in \mathbb{I} \end{array} \right\} \Rightarrow ab \in \mathbb{I}?$

Falso. Contraejemplo: $a = 0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow ab = 0 \in \mathbb{Q} \quad \forall b \in \mathbb{I}$.

Nota: Si $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{I}$, entonces $ab \in \mathbb{I}$.

Deducción al absurdo:

$a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{I}$. Suponemos $ab \in \mathbb{Q}$.

Entonces, $\exists p, n \in \mathbb{Z}, q, m \in \mathbb{N}, n \neq 0$ /

$$a = \frac{n}{m}, ab = \frac{p}{q}.$$

$$\text{Por tanto, } b = \frac{1}{a} \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \rightarrow \text{falso}.$$

c) $\exists a \in \mathbb{I} / a^2 \in \mathbb{I} \text{ y } a^4 \in \mathbb{Q}?$

Sí. Ejemplo: $a = 2^{\frac{1}{4}} \Rightarrow a^2 = \sqrt{2} \in \mathbb{I}, a^4 = 2 \in \mathbb{Q}$.

d) $\exists a, b \in \mathbb{I} / ab \in \mathbb{Q} \text{ y } a+b \in \mathbb{Q}?$

Sí. Ejemplo: $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2} \Rightarrow a+b = 0 \in \mathbb{Q},$
 $a \cdot b = -2 \in \mathbb{Q}.$

2.

a) $|x| < 5 \Rightarrow x < 5$?

Cierto. $|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$. En particular, $x < 5$.

b) $x < 5 \Rightarrow |x| < 5$?

Falso. Ejemplo: $x = -6 \Rightarrow |x| = 6$.

c) $|x-5| < 2 \Leftrightarrow 3 < x < 7$?

Cierto. $|x-5| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-5 < 2 \Leftrightarrow 3 < x < 7$.

d) $|1+3x| \leq 1 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$?

Cierto. $|1+3x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1+3x \leq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2 \leq 3x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq 0$.

e) $\nexists x \in \mathbb{R} / |x-1| = |x-2|$?

Falso. $x = \frac{3}{2} \Rightarrow |x-1| = \frac{1}{2} = |x-2|$.

f) $\forall x > 0, \exists y > 0 / |2x+y| = 5$?

Falso. Si $y > 0$, $x \geq \frac{5}{2}$, entonces $2x \geq 5$, luego
 $|2x+y| > 5$.

3.

$$a) |2x-3|=7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=7 \Leftrightarrow x=5 \\ 0 \\ 2x-3=-7 \Leftrightarrow x=-2. \end{cases}$$

Dos soluciones: $x=5$, $x=-2$.

$$b) |x|=5 \Leftrightarrow x=5 \text{ o } x=-5.$$

$$c) |x-3|=-3 \text{ No tiene solución } (|z| \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{R}).$$

$$d) |x+8|=0 \Leftrightarrow x+8=0 \Leftrightarrow x=-8.$$

$$e) |2x+3|=-9 \text{ No tiene solución (como c)}.$$

$$f) |x+3|=5+x$$

$$\bullet \text{ Si } x+3 \geq 0: x+3=5+x \Leftrightarrow 0=2 \rightarrow \text{No}$$

$$\bullet \text{ Si } x+3 < 0: -x-3=5+x \Leftrightarrow 2x=-8 \Leftrightarrow x=-4.$$

$$g) 2|x|+|x-1|=4$$

$$\bullet \text{ Si } x \geq 0: 2x+|x-1|=4,$$

$$\text{Si } x-1 \geq 0: 2x+x-1=4 \Leftrightarrow 3x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$$

$$\text{Si } x-1 < 0: 2x-x+1=4 \Leftrightarrow x=3. \text{ Pero } 3 \notin [1, \infty).$$

- Si: $x < 0$: $-2x + |x-1| = 4$

Si $x-1 \geq 0$: $-2x + x-1 = 4 \Leftrightarrow -x = 5 \Leftrightarrow x = -5$,

Pero $-5 \not\geq 1$.

Si $x-1 < 0$: $-2x - x + 1 = 4 \Leftrightarrow -3x = 3 \Leftrightarrow x = -1$.

Por tanto, dos soluciones: $x = -1$, $x = \frac{5}{3}$.

h) $|2x-3| - 2|x| = 3$

- Si: $x \geq 0$: Si: $2x-3 \geq 0$: $2x-3-2x = 3 \Leftrightarrow -3 = 3 \rightarrow \text{no}$.

Si: $2x-3 < 0$: $3-2x-2x = 3 \Leftrightarrow x = 0$.

- Si: $x < 0$: Si: $2x-3 \geq 0$: $2x-3+2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \not< 0$.

Si: $2x-3 < 0$: $3-2x+2x = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$.

Por tanto, infinitas soluciones. El conjunto S de soluciones es:

$$S = \{0\} \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 0].$$

4.

a) $|5x+2| > 0$

• Si $5x+2 \geq 0$: $5x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{5}$

• Si $5x+2 < 0$: $-5x-2 > 0 \Leftrightarrow 5x+2 < 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x < -\frac{2}{5}$.

Por tanto,

$$|5x+2| > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5}\right\}.$$

Nota: Obvio pues

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : |5x+2| > 0\} &= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |5x+2| \leq 0\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |5x+2| = 0\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : 5x+2 = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5}\right\}. \end{aligned}$$

b) $2|3-x|-10 \geq 0$

• Si $3-x \geq 0$: $6-2x-10 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$

• Si $3-x < 0$: $2x-6-10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 8$.

Por tanto,

$$2|3-x|-10 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [8, \infty).$$

$$c) |x-3| \leq 2x-5$$

$$\cdot x-3 \geq 0: x-3 \leq 2x-5 \Leftrightarrow x \geq 2 \longrightarrow x \in [3, \infty)$$

$$\cdot x-3 < 0: 3-x \leq 2x-5 \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{3} \longrightarrow x \in \left[\frac{8}{3}, 3\right)$$

$$\text{Solución: } x \in \left[\frac{8}{3}, \infty\right)$$

$$d) |x| + 3 \geq 2x$$

$$\cdot x \geq 0: x+3 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq 3 \longrightarrow x \in [0, 3]$$

$$\cdot x < 0: -x+3 \geq 2x \Leftrightarrow 3x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1 \longrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

$$\text{Solución: } x \in (-\infty, 3]$$

$$e) |x-1| + |x+1| < 4$$

$$\cdot x-1 \geq 0: x+1 \geq 0: 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2 \longrightarrow x \in [1, 2)$$

$$x+1 < 0: \text{No es posible}$$

$$\cdot x-1 < 0: x+1 \geq 0: 2 < 4 \longrightarrow x \in [-1, 1)$$

$$x+1 < 0: -2x < 4 \Leftrightarrow x > -2 \longrightarrow x \in (-2, -1)$$

$$\text{Solución: } x \in (-2, 2)$$

$$f) |x-2| + 3|x| \leq 6$$

$$\cdot x-2 \geq 0: x \geq 0: 4x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 2 \longrightarrow x = \{2\}$$

$$x < 0: \text{No es posible.}$$

$$\bullet x-2 < 0 : x \geq 0 : 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2 \rightarrow x \in [0, 2)$$

$$x < 0 : -4x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq -1 \rightarrow x \in [-1, 0)$$

Solución: $x \in [-1, 2]$.

5.

$$a) A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x-2} > 0, x > -1\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x-2} > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$$

Desarrollamos el primero:

$$\bullet \text{ Si } x-2 > 0 : \frac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\bullet \text{ Si } x-2 < 0 : \frac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Así,

$$\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x-2} > 0\} = (2, \infty) \cup (-\infty, 1),$$

por lo que

$$A = \{(2, \infty) \cup (-\infty, 1)\} \cap (-1, \infty) = (-1, 1) \cup (2, \infty).$$

$$b) B = \{x \in \mathbb{R} : 4x < 6x+2, -3x \geq -1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 4x < 6x+2\} \cap \{x \in \mathbb{R} : -3x \geq -1\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : 2x > -2\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1}{3}\} =$$

$$= (-1, \infty) \cap (-\infty, \frac{1}{3}] = (-1, \frac{1}{3}]$$

$$c) C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3x+6}{x-1} > 0\}$$

$$S: x-1 > 0 : \frac{3x+6}{x-1} > 0 \Leftrightarrow 3x+6 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

$$S: x-1 < 0 : \frac{3x+6}{x-1} > 0 \Leftrightarrow 3x+6 < 0 \Leftrightarrow x < -2$$

$$\text{Por tanto, } C = (1, \infty) \cup (-\infty, -2).$$

$$d) D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 > 0\}$$

$$\text{Factorizando: } x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} / 3 \\ \backslash 2 \end{matrix}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

$$\text{Ahora estudiamos } (x-3)(x-2) > 0:$$

$$\cdot S: x-3 > 0 : (x-3)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\cdot S: x-3 < 0 : (x-3)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$\text{Por tanto, } D = (-\infty, 2) \cup (3, \infty).$$

$$e) E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 8 \leq 0\}$$

Factorizamos: $x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = 3 \pm 1 = \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}$

$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x-4)(x-2) \leq 0\}$$

Como antes, tenemos que

$$(x-4)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \leq 0 \text{ y } x-2 \geq 0, \\ x-4 \geq 0 \text{ y } x-2 \leq 0. \end{cases}$$

Así, $E = [2, 4]$

6. [Inducción] ($n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$)

a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

• Caso base: $\underline{n=1}$: $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ cierto.

• Hipótesis de inducción: asumimos cierto para n ,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

• Demostramos que entonces lo es también para $n+1$:

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} =$$

↑
Hipótesis de
inducción

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Esto es, $1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$

b) $1^m + 2^m + \dots + n^m \leq n^{m+1},$

• Caso base: $m = 0$:

$$1^0 + 2^0 + \dots + n^0 = 1 + \dots + 1 = n \leq n^1 = n.$$

• Hipótesis de inducción: $1^m + 2^m + \dots + n^m \leq n^{m+1},$

• Demostremos para $m+1$:

$$1^{m+1} + 2^{m+1} + \dots + n^{m+1} = 1 \cdot 1^m + 2 \cdot 2^m + \dots + n \cdot n^m \leq$$

$$\leq n \cdot 1^m + n \cdot 2^m + \dots + n \cdot n^m = n(1^m + 2^m + \dots + n^m) \leq$$

$$\leq n \cdot n^{m+1} = n^{(m+1)+1}.$$

↑
Hip. Inducción

c) $4^n > n^2$

• Caso base: $n = 1$: $4^1 = 4 > 1^2 = 1.$

• Hip. inducción: $4^n > n^2.$

• Para $n+1$: $4^{n+1} = 4 \cdot 4^n > 4 \cdot n^2.$

↑
Hip. ind.

Queremos probar ahora que $4 \cdot n^2 \geq (n+1)^2$:

$$4n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 4n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 3n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

Resolvamos la inecuación $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{1 \pm 2}{3} \quad \begin{array}{l} 1 \\ -1/3 \end{array}$$

$$3x^2 - 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x + \frac{1}{3}) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [1, \infty) \cup (-\infty, -\frac{1}{3}].$$

En particular, $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$ para todo $x \geq 1$,
y por tanto $3n^2 - 2n - 1 \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En resumen, tenemos $4^{n+1} > (n+1)^2$.

d) $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x > -1$.

• Caso base: $n=1$: $(1+x)^1 = 1+x \geq 1+1 \cdot x$.

• Hip. ind.: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

• Para $n+1$: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$

$\uparrow$
Hip. ind.
y $x > -1$

Queremos probar que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

Tenemos que

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = \\ = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

7.

a) $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$

• $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = 0$.

• $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \rightarrow \sqrt{2} \notin A \rightarrow A$ no tiene máximo.

$0 \in \mathbb{Q} \rightarrow 0 \in A \rightarrow A$ tiene mínimo.

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$

Como a).

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \geq 0\}$

Vemos que $x^2 + x + 1 \geq 0$ se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$.

Es decir, $C = \mathbb{R}$. No tiene cota superior ni inferior, luego no tiene supremo ni ínfimo.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 < 0\}$

Ahora tenemos $D = \emptyset$, el conjunto vacío.

Cualquier número $\alpha \in \mathbb{R}$ es cota superior de $\emptyset$,
 pues de lo contrario $\exists a \in \emptyset / a \leq \alpha$. Por tanto, no
 existe una cota superior mínima. Esto es, $\emptyset$ no
 tiene supremo.

Análogamente, no tiene ínfimo.

8.

a) $A = (-1, 1) \cup (2, \infty) \Rightarrow$ No tiene supremo.

$\inf A = -1$, no tiene mínimo.

b) $B = (-1, \frac{1}{3}] \Rightarrow \sup B = \frac{1}{3}, \inf B = -1$
 No tiene mín., $\max B = \frac{1}{3}$.

c) $C = (1, \infty) \cup (-\infty, -2) \Rightarrow$ No tiene sup. ni inf.

d) Como c).

e) $E = [2, 4] \Rightarrow \sup E = \max E = 4, \inf E = \min E = 2$.

9. $\exists x, y \in \mathbb{I} / x^y \in \mathbb{Q}?$

Si. Ejemplo: llamamos $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. No sabemos si $a \in \mathbb{Q}$ o $a \in \mathbb{I}$.

Si $a \in \mathbb{Q}$, hemos terminado (pues $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$).

Si $a \in \mathbb{I}$, entonces tenemos que

$$a^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}.$$

10.

e) $x^3 - x^2 - 5x - 3 \leq 0$

Tenemos que factorizar el polinomio.

Vemos que $x = -1$ es una raíz.

Por tanto, $p(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = g(x)(x+1)$.

Hallamos $g(x)$:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - x^2 - 5x - 3 \\
 \underline{-x^3 - x^2} \\
 -2x^2 - 5x - 3 \\
 \underline{2x^2 + 2x} \\
 -3x - 3 \\
 \underline{3x + 3} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x+1 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 x^2 - 2x - 3
 \end{array}$$

Así, $p(x) = (x^2 - 2x - 3)(x+1)$. Factorizamos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2 \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = (x-3)(x+1)^2.$$

Por tanto, $x^3 - x^2 - 5x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)^2 \leq 0.$

• Si $x \neq -1$, $(x+1)^2 > 0$. Por tanto,

$$(x-3)(x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Como $x = -1$ satisface también la inecuación, concluimos

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

11.

$$b) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \left[\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \right]$$

• Caso base: $n=1$: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \checkmark$

• Hip. Ind.: $1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

• Objetivo: Probar $1 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{Hip. Ind.} \\ -15-}} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + n+1 \right] = (n+1) \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = 2n^2 + 3n + 4n + 6$$

Comprobamos que $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$, por tanto,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 \stackrel{\text{Hip. Ind.}}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

c), d) no similares a b)

e) Binomio de Newton $\rightarrow$ Apuntes de clase.

12. Demuestra que

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) + 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

• Caso base: $n=1$:

$$2(\sqrt{2} - \sqrt{2}) + 1 = 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1}} \leq 2 \cdot 1 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

• Hip. Ind.: $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) + 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$

• Objetivo: Usando Hip. Ind., probar que

$$2(\sqrt{n+2} - \sqrt{2}) + 1 \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n+1} - 1.$$

Calculamos:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}_{\text{Hip. Ind.}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow$$

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) + 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Nos basta entonces con probar ahora que

$$1) \quad 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) + 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{2}) + 1, \quad y$$

$$2) \quad 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} - 1.$$

Vemos que:

$$1) \quad 2\sqrt{n+1} - \cancel{2\sqrt{2}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+2} - \cancel{2\sqrt{2}} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2(n+1) + 1}_{= 2n+3} \geq 2\sqrt{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2n+3)^2 \geq 4(n+1)(n+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 9 + 12n \geq 4n^2 + 12n + 8 \Leftrightarrow 9 \geq 8 \checkmark.$$

$$2) \quad 2\sqrt{n} - \cancel{x} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} - \cancel{x} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} + 1 \leq 2(n+1) \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n(n+1) \leq 4n^2 + 4n + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 \checkmark.$$

12. $A = \{x \in \mathbb{Q} : x|x-2| < 2x-3\}$

• Si $x-2 \geq 0 : x(x-2) < 2x-3 \Leftrightarrow$
($x \geq 2$)

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (1, 3)$$

Como $x \geq 2 \rightarrow [2, 3)$

$$\boxed{x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1}$$

• Si $x-2 < 0 : x(2-x) < 2x-3 \Leftrightarrow -x^2 < -3 \Leftrightarrow$
($x < 2$)

$$\Leftrightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$$

Como $x < 2 \rightarrow (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2).$

Is decir, $A = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$.

Por tanto, $\sup A = 3$, $\nexists \inf A$.