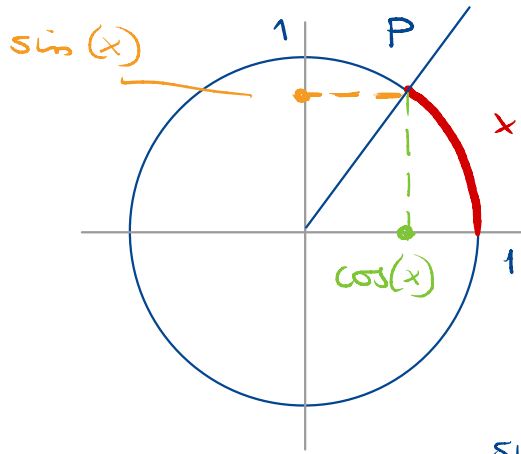


Clase 9: Funciones trigonométricas. Límites.

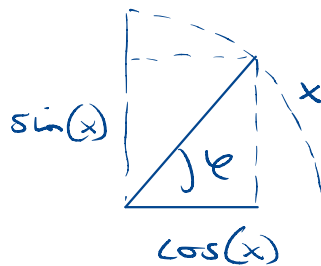
5) Funciones trigonométricas : $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$



Arco de $(1,0)$ a $P \equiv$ longitud x .

↳ Coordenadas de P :

$$P \equiv (\cos(x), \sin(x))$$



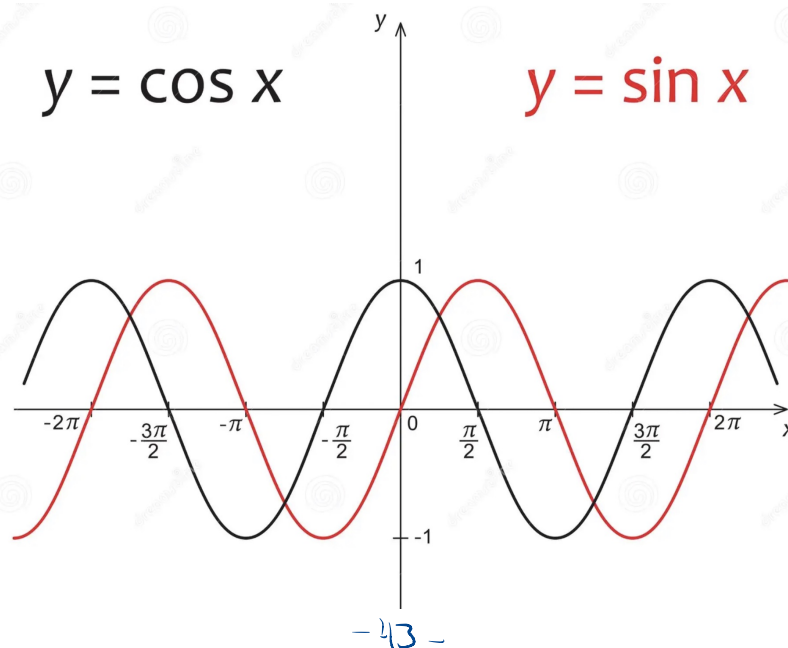
$x \equiv$ "x radianes"

$\rightarrow \sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \leadsto \sin(x)$ es impar

$\rightarrow \cos(0) = 1, \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \leadsto \cos(x)$ es par

Propiedades: $\sin(x), \cos(x) \in [-1, 1]$

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1} \leadsto (\cos(x), \sin(x))$$



Fórmulas de la suma, ángulo doble, ... muy útiles en
mecánica vectorial

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) & \cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \rightarrow & \sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\rightarrow \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ definida en } \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\}$$

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\hookrightarrow \text{Dom}(\tan) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

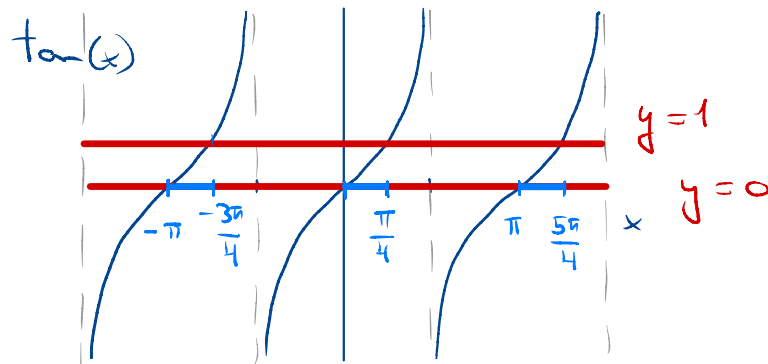
- Ejercicio: Si: $\text{Dom}(f) = [0, 1]$, ¿cuál es el dominio de la función $f(\tan(x))$?

Sol: Denotamos $g(x) = f(\tan(x))$. Entonces,

$$\begin{aligned}\text{Dom}(g) &= \{x \in \mathbb{R} : \tan(x) \in \text{Dom}(f)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \tan(x) \in [0, 1]\}\end{aligned}$$

Sabemos que $\tan(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$



Concluimos que

$$\text{Dom}(g) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right)$$

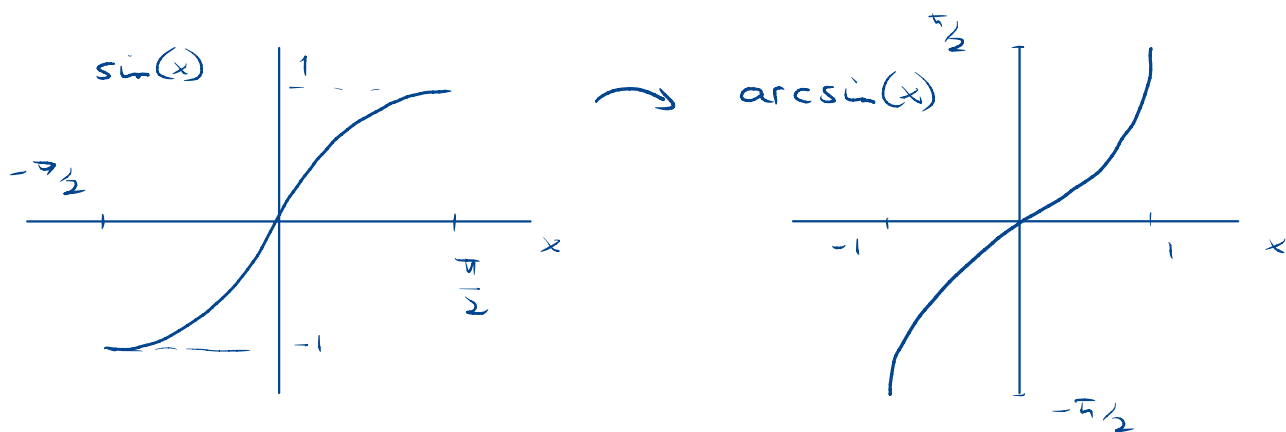
• Igualmente definiremos

$$\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)}, \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)},$$

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad (\text{y sus respectivos dominios}).$$

6) Funciones trigonométricas inversas.

Se definen las funciones arco seno, arco coseno y arco tangente como las inversas de seno, coseno y tangente restringidas a un intervalo donde sean inyectivas:

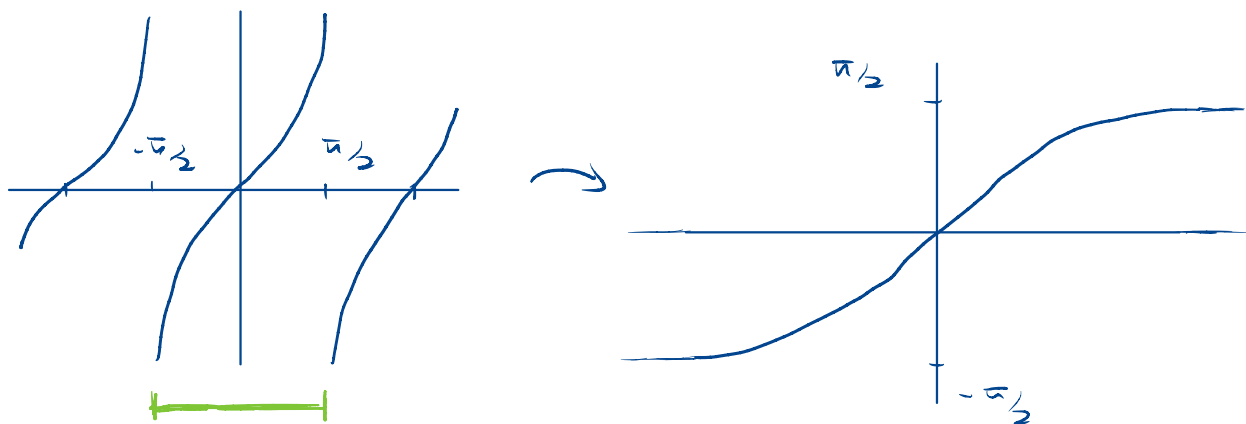


$$\left. \begin{array}{l} \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto \sin(x) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x \mapsto \arcsin(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \arcsin(x) = y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \sin(y) \end{array}$$

→ Análogamente con el arccos.

$$\rightarrow \arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \left\{ \begin{array}{l} \arctan(x) = y \Leftrightarrow \\ x = \tan(y) \end{array} \right.$$



7) Funciones hiperbólicas

Senó hiperbólico: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Coseno hiperbólico: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

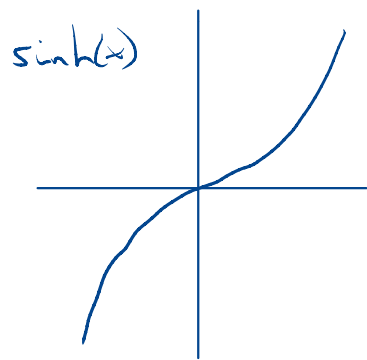
Tangente hiperbólica: $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

$$\rightarrow \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

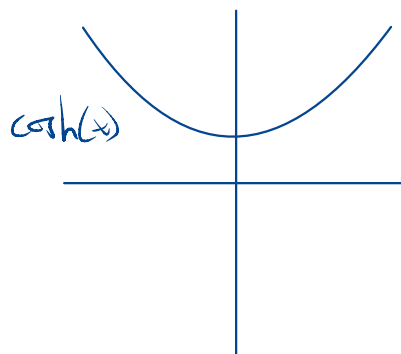
Cumplen propiedades similares a sus versiones trigonométricas:

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y),$$

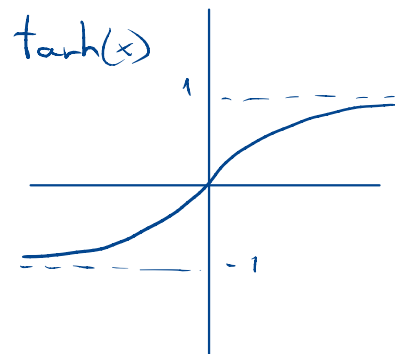
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y). \quad [\dots]$$



Impar, $\sinh(0) = 0$
 Biyectiva, estúd. aer.



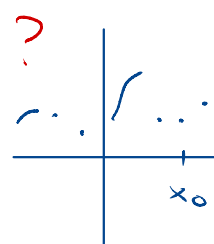
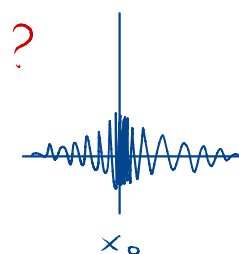
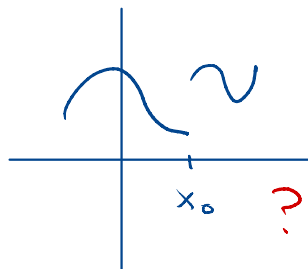
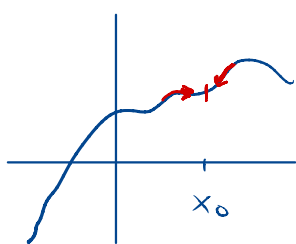
Par, $\cosh(0) = 1$
 Ni inyectiva,
 ni sobreyed.



Impar, inyectiva,
 no sobrey.,
 est. acríde.

Tema 2.2: Límites

Sabemos que, intuitivamente, el límite de una función en un punto es el valor "al que tiende o acerca":



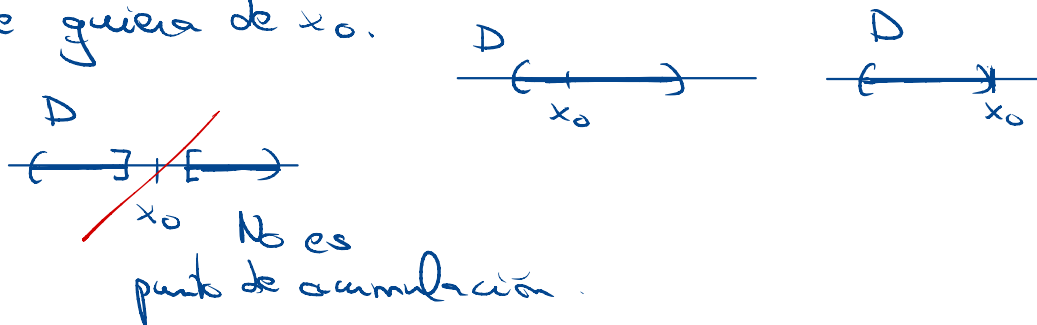
Para estudiar funciones complicadas, necesitaremos una definición rigurosa.

Denotamos el intervalo abierto centrado en $x_0 \in \mathbb{R}$ y radio $r > 0$ como $B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.



- Def.: Dado un conjunto $D \subset \mathbb{R}$, se dice que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de D si $\forall r > 0, B(x_0, r) \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. [No en clase]

Es decir, $x_0 \in \mathbb{R}$ (puede no estar en D) es punto de acumulación de D si hay puntos en D tan cerca como se quiera de x_0 .



→ En general, asumiremos en lo que sigue que siempre tratamos con puntos de acumulación.

- Def.: Sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ (punto de acumulación de D). Se dice que $L \in \mathbb{R}$ es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 si:

$$\forall \varepsilon > 0,$$

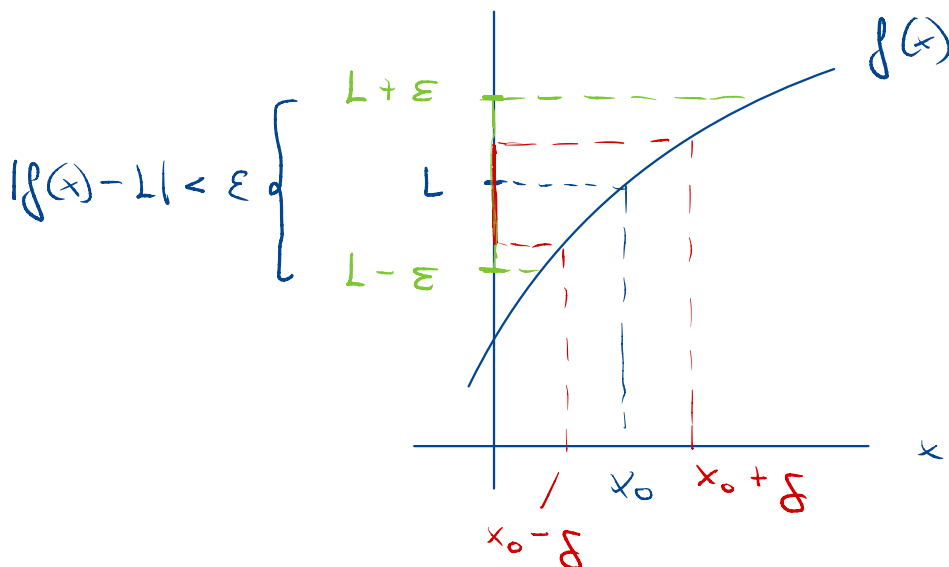
$$\exists \delta > 0 / \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

$$(\forall x \in D)$$

$$\text{Se denota } L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

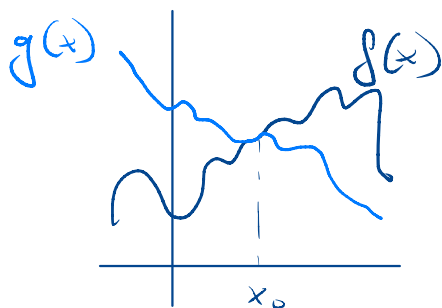
Nota: Recordad $|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$



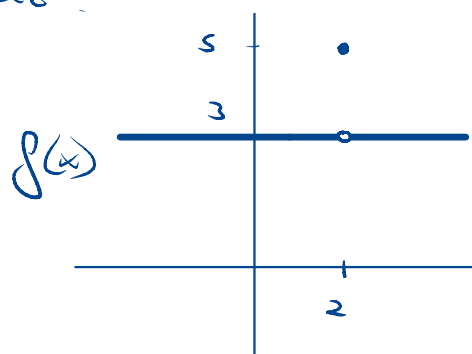
“Por muy pequeño que escoja $\varepsilon > 0$, siempre puedo un intervalo de x_0 tal que las imágenes están a distancia de L menor que ε .”

Nota: El valor de un límite es una propiedad “local”, solo depende del entorno del punto.



$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Nota: El valor de la función en x_0 no importa para el límite en x_0 . Puede ni estar definida en x_0 :



$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \neq f(2).$$

Ejercicio: Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.
(usando la definición de límite).

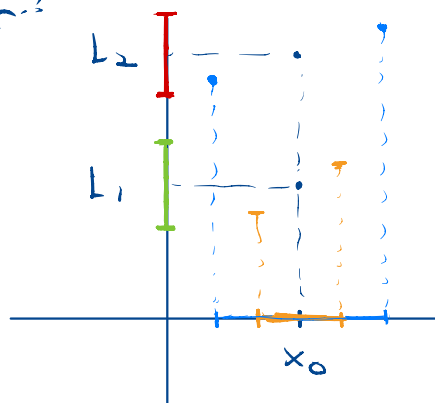
• Propiedades:

1) El límite de una función en un punto es único.

Es decir, si $L_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y $L_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,

entonces $L_1 = L_2$.

Dem.:



Lo vemos intuitivamente:

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$, entonces

los valores de $f(x)$ para $x \approx x_0$ deben ser $f(x) \approx L_2$.

Como lo mismo ocurre con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$,

tenemos que para $x \approx x_0$ debería ocurrir que

$$f(x) \approx L_1$$

$$f(x) \approx L_2.$$

Y como podemos "acercarnos" tanto como queramos, si $L_1 \neq L_2$ llegaremos a un absurdo. ||

Lo escribimos rigurosamente: Por reducción al absurdo. Supongamos $L_1 \neq L_2$.

Como $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$, se tiene que,

fijado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$\text{para } x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in (L_1 - \frac{\varepsilon}{2}, L_1 + \frac{\varepsilon}{2}),$$

$$\text{para } x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in (L_2 - \frac{\varepsilon}{2}, L_2 + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Tomando $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, ambas implicaciones son ciertas, es decir,

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto,

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| <$$

$$< |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como por hipótesis $L_1 - L_2 \neq 0$, $|L_1 - L_2| > 0$.

Y como $\varepsilon > 0$ era cualquiera, basta con tomar $\varepsilon < |L_1 - L_2|$ para llegar a una contradicción.

2) Sea $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Entonces, si $c \in \mathbb{R}$ y $c > L$,

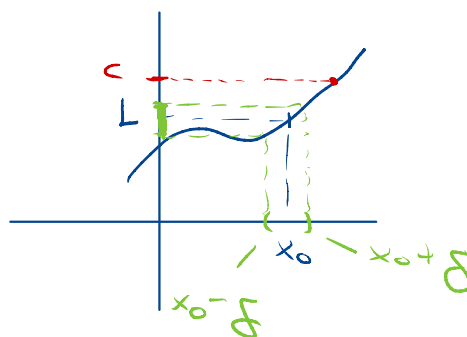
existe $\delta > 0$ / $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) < c$.

[Análogamente, si $c < L$, $\exists \delta > 0$ /

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > c$].

← Ej. clase 9

Dem. (ejercicio)



Clase 10: Límites

Corolario: Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$, entonces existe

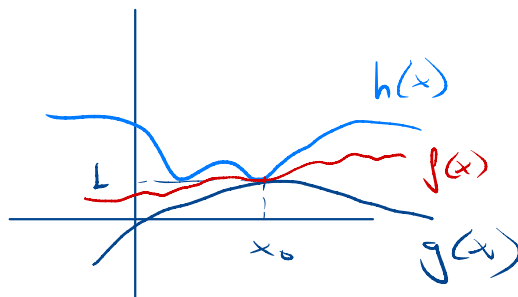
$f(x)$ tiene el mismo signo que L "para x cercano a x_0 ".

I.e., $\exists \delta > 0$ / si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, $\text{sign}(x) = \text{sign}(L)$.

(Dem. ejercicio).

3) Regla del sandwich:

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,
y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ } entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.



• Def.: [Límites laterales]

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en x_0 por la izquierda si

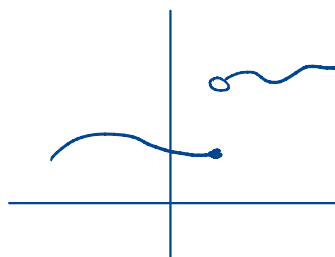
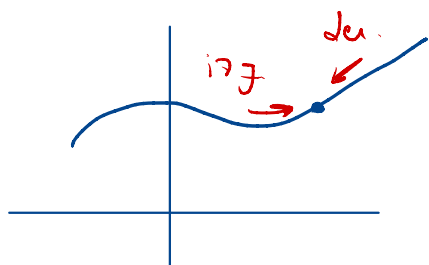
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se denota $L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Por la derecha si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se denota $L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$



• Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

→ Por tanto, si un límite lateral no existe, o si ambas existen pero son distintos, entonces el límite no existe.

Límites infinito y en infinito

• Def: [Límites infinito en un punto]

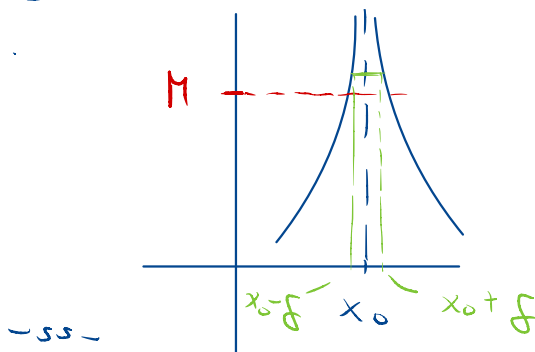
• $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite $+\infty$ en x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} = +\infty$, si

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

• Análogamente, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

En estos casos se dice que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en x_0 .



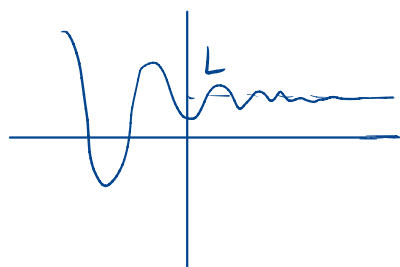
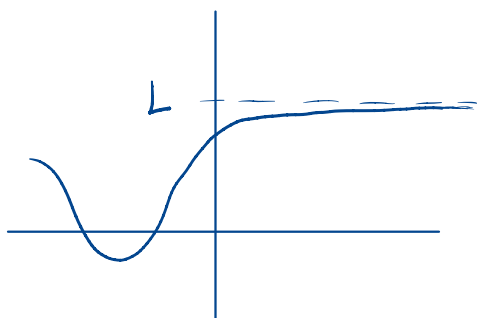
• Def: [límites finitos en infinito]

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 /$

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 /$

$$x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Se dice entonces que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal.

• Def: [límite infinito en infinito]

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall M > 0, \exists k > 0 / x > k \Rightarrow f(x) > M.$

(análogo para resto de casos).

→ Cuando $f(x)$ tiene límites infinitos en infinito, a veces puede tener asíntotas oblicuas:

$y = mx + n$ es asíntota de f en $+\infty$ si:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

Así, se calcula $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$.

[Analog. en $-\infty$].

Cálculo de límites

Álgebra de límites $\rightarrow$ repasar (apuntes complementario).

- Si x_0 está en el dominio de $f(x)$, por sustitución directa.
- Si $f(x)$ definida a trozos separados en $x_0 \rightarrow$ estudia l. laterales.
- Indeterminaciones:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

Ejemplos tipo:

1) Simplificar fracciones:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{\cancel{x-2}} = 5.$$

2) División por mayor acimienta:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x}{x^3 - x^2 + 4} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

3) Racionalización:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} &= \left(\frac{2}{\infty - \infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{x+1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = \infty.\end{aligned}$$

4) Usando exponencial y logaritmo (0^0 , ∞ , 1^∞):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{2}{3-\ln x}} &= (0^0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^{\frac{2}{3-\ln x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2}{3-\ln x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{3-\ln x}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{3}{\ln x} - 1}} = e^{-2}.\end{aligned}$$

5) L'Hôpital ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$) $\rightarrow$ (Siguiente tema)

6) Infinitésimos equivalentes.

• Def: Se dice que $f(x)$ es un infinitésimo en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (aquí x_0 puede ser $\pm \infty$)

Podemos comparar cómo de rápido una función

se hace cerca de x_0 respecto a otra. Así,
decimos que $f(x)$ es de menor orden que $g(x)$
en x_0 (o simplemente despreciable frente a $g(x)$
cerca de x_0) si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad \text{Se denota } f(x) = o(g(x)).$$

→ Si son "iguales" se llaman infinitésimos
equivalentes en x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad \text{Se denota } f(x) \stackrel{x_0}{\sim} g(x).$$

• Nota:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \\ g(x) \text{ acotada en} \\ \text{un entorno de } x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0.$$

• Ejemplo notable: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

→ Infinitésimos importantes:

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, entonces

$$f(x) \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(f(x)) \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} \tan(f(x)) \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} \arcsin(f(x)) \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} \arctan(f(x))$$

$$1 - \cos(f(x)) \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{f(x)^2}{2}$$

$$\ln(1 + f(x)) \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} f(x), \quad e^{f(x)} - 1 \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} f(x)$$

↳ Nota: Será más intuitivo cuando veamos los polinomios de Taylor.

→ Casos más frecuentes:

Para $x \rightarrow 0$:

$$\sin(x) \sim x$$

$$\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\log(1+x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

Para $x \rightarrow 1$:

$$\log(x) \sim x - 1$$

⋮

Ejercicios 10.c), 11.a), 8.c), d), 21.b), d),
23., 24.a), b), c)

10.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 3.$$

← Fíjate que 10

Clase 11: Límites. Ejercicios.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin(x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin(x)}{\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{x^2/2}} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2} \frac{2x - \sin(x)}{|x|}$$

Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2} \frac{2x - \sin(x)}{x} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{2} \frac{2x - \sin(x)}{-x} = -2\sqrt{2} + \sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$

No coinciden, luego $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin(x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}}$.

11.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = (1^\infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(x+2) \ln \left(\frac{x-1}{x+3}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \ln \left(\frac{x-1}{x+3}\right)} = e^{(\infty \cdot 0)}$$

$$\text{Como } \frac{x-1}{x+3} = 1 + \frac{x-1}{x+3} - 1 = 1 + \frac{-4}{x+3} \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{x+3} = 0, \text{ tenemos que}$$

$$\ln \left(\frac{x-1}{x+3}\right) = \ln \left(1 + \frac{-4}{x+3}\right) \stackrel{x \sim 0}{\sim} \frac{-4}{x+3}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \frac{\ln \left(1 + \frac{-4}{x+3} \right)}{-\frac{4}{x+3}} \cdot \frac{-4}{x+3}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4(x+2)}{x+3}} = e^{-4}.\end{aligned}$$

8

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

No existe, pues $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}.$

21.

$$\begin{aligned}b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-1}{x-1} - mx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-1-mx^2+mx}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1-m) + x(1+m) - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1-m) + (1+m) - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x(1-m) + (1+m) = \begin{cases} 2 & \text{si } m=1, \\ \infty & \text{si } m < 1, \\ -\infty & \text{si } m > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} x^2(x-1) \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

Para $x \in (0, 2)$, $-4 < x^2 \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) < 4$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1} -4(x-1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} 4(x-1)$,

por la regla de Sandwich $\lim_{x \rightarrow 1} x^2(x-1) \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0$.

← Fin Clase 11.

(Clase 12: Ejercicios (límites))

24.

a) $\left. \begin{array}{l} \nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ \nexists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{¿ Puede existir } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x)? \\ \text{¿ } \forall \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)? \end{array}$

Sol:

Si. Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} (-f(x))$

Sin embargo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - f(x) = 0 \quad \checkmark$$

b) $\left. \begin{array}{l} \nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ \nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) \end{array} \right\} \xrightarrow{?} \nexists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Sí. Escribimos $g(x) = g(x) + f(x) - f(x)$.

Como $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) + f(x))$ y $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, podemos

usar que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) + f(x)) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

No. Ej.: $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \text{ pero } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

c) Si $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$?

Sl.: No, por apartado b).

Dem.: Red. absurd.: Supongamos $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$.

Entonces como $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$,

por b.1) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \rightarrow \times$.

23

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{1}{2}$$

• Ejercicio: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Sol: Cambio de variable $t = \frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t}}{1/t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0 \checkmark$$

• Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin(x)}{x}}{1 + \frac{\sin(x)}{x}} = 1.$$

8.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x^3 + 1)^{1/3} - x) = (\infty - \infty)$

Usamos que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ((x^3+1)^{1/3} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{((x^3+1)^{1/3} - x)((x^3+1)^{2/3} + x^2 + x(x^3+1)^{1/3})}{(x^3+1)^{2/3} + x^2 + x(x^3+1)^{1/3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1 - x^3}{(x^3+1)^{2/3} + x^2 + x(x^3+1)^{1/3}} = 0.$$

• Ejercicios:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 - 1 = 0.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}. \\ &(\text{por L'Hôpital}) \end{aligned}$$