

Clase 13: Continuidad de funciones

- Def: Una función $f(x)$ es continua en $x_0 \in \text{Dom}(f)$ si

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Esto es, $f(x)$ continua en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) / |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$$(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$

- Análogamente, se dice que

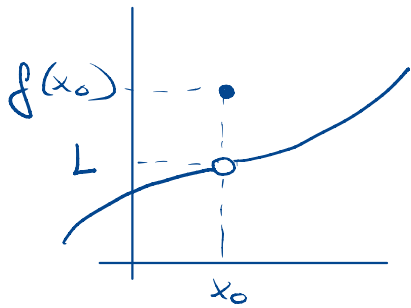
$$f(x) \text{ continua por la izq. en } x_0 \text{ si } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

$$\text{por la derecha en } x_0 \text{ si } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

→ Decimos que f es continua en $A \subset \text{Dom}(f)$ si es continua en todo $x \in A$.

- Tipos de discontinuidad:

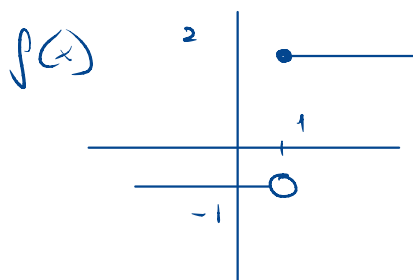
1) Evitable: $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ pero $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.



Ej: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ discontinuidad evitable en cero.

2) De salto: $\exists$ límites laterales finitos pero no coinciden.

A la diferencia entre esos valores se le llama salto en x_0 :

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right|$$


Salto en $x_0 = 1$ de valor 3.

3) Esencial: Al menos un límite lateral no existe o es infinito.

Ej: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x_0 = 0$.

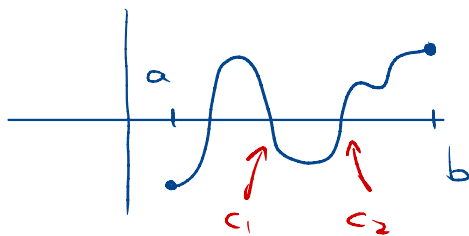
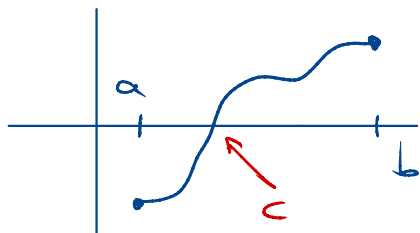
- Teoremas fundamentales de las funciones continuas

- Def: Llamamos intervalos cerrados y acotados a aquellos de la forma $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

- Teorema de Bolzano:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [a, b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) = 0.$$

Es decir, si la función tiene signos distintos en dos puntos, en algún punto intermedio ha de valer 0.

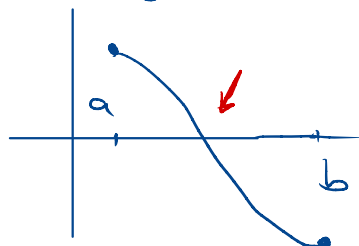


Nota: El teorema nos asegura que existe algún valor c donde $f(c) = 0$.

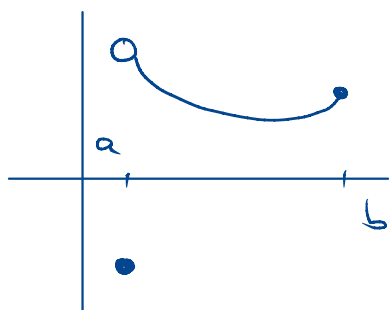
Pero no nos dice que sea único, puede haber varios.

→ En la práctica, podemos deducir la unicidad si tenemos información adicional.

Ejemplo típico: $f(a) \cdot f(b) < 0$, f continua en $[a, b]$,
y f estrict. creciente en (a, b)



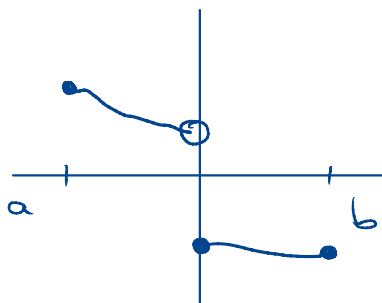
Nota: Las hipótesis son claramente necesarias:



f continua en (a, b)

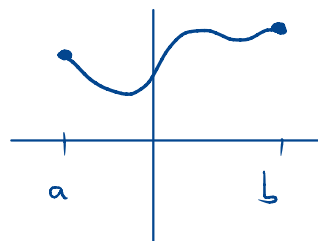
$f(a) \cdot f(b) < 0$

intervalo
abierto



$f(a) \cdot f(b) < 0$

f no es
continua
en $x=0 \in [a, b]$



f continua en $[a, b]$

$f(a) \cdot f(b) > 0$

f no cambia de
signo

→ Aplicación:

- 1) Demostrar que una ecuación tiene solución.
- 2) Método para aproximar numéricamente las soluciones de una ecuación.

Ejemplo: Dado el polinomio $p(x) = 2x^3 - x^2 + 7x - 1$,
¿tiene alguna raíz real?

Sol: Probamos que sí usando el T^{te} de Bolzano.

Vemos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$, y además

$p(x)$ es continua pues es un polinomio.

Por definición, $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$ si para todo $M_1 > 0$,

$\exists k_1 > 0$ / si $x \geq k_1$, $p(x) > M_1$.

Análogamente,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ si $\forall M_2 > 0$, $\exists k_2 > 0$ / si $x \leq -k_2$,
entonces $p(x) < -M_2$.

Por tanto,

$p(x)$ continua en $[-k_2, k_1]$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{T}^{\text{te}} \text{ Bolzano} \\ \downarrow \\ \Rightarrow \exists x_0 \in [-k_2, k_1] / p(x_0) = 0. \end{array} \right.$
 $p(-k_2) < -M_2 < 0$
 $p(k_1) > M_1 > 0$

Ejemplo: Probar que $x - \sin(x) = 1$ tiene solución.

Sol:

Queremos hallar algún x_0 / $x_0 - \sin(x_0) = 1$.

Definimos la función $f(x) = x - \sin(x) - 1$.

Claramente, buscamos $x_0 / f(x_0) = 0$.

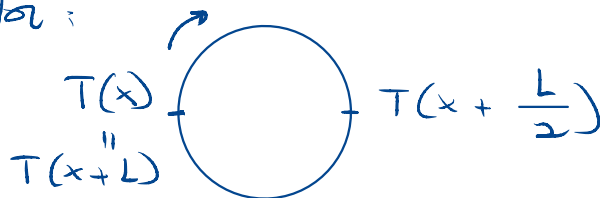
Tratamos de usar Bolzano:

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(0) = -1, f(\pi) = \pi - 1 > 0 \\ 2) f \text{ es continua en } [0, \pi] \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Teorema Bolzano}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (0, \pi) / f(x_0) = 0.$$

Ejercicios: 32

La función que da la temperatura en cada punto del ecuador ha de ser periódica, con periodo la longitud del ecuador:



$$\left. \begin{array}{l} T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto T(x) \end{array} \right\} \text{ con } T(x) = T(x+L),$$

$L \equiv \text{longitud ecuador.}$

Asumimos que T es continua.

$$\text{Definimos } g(x) = T(x) - T(x + \frac{L}{2}).$$

Queremos probar que $\exists x \in [0, L] / g(x) = 0$.

Vemos que:

$$g(0) = T(0) - T\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{L}{2}\right) = T\left(\frac{L}{2}\right) - T(L) = T\left(\frac{L}{2}\right) - T(0).$$

Si $T(0) = T\left(\frac{L}{2}\right)$, ya tenemos el pto.

Si no, tenemos que

$$g(0) \cdot g\left(\frac{L}{2}\right) = -\left(T(0) - T\left(\frac{L}{2}\right)\right)^2 < 0 \quad \left\{ \Rightarrow \right.$$

$$T \text{ continua en } \left[0, \frac{L}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \exists x \in \left(0, \frac{L}{2}\right) / T(x) = T\left(x + \frac{L}{2}\right) //$$

Clase 14: Continuidad, ejercicios.

Ejercicios: 14. a), b) Estudiar continuidad:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x = 0, \\ \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} & x \neq 0. \end{cases}$$

Denotemos $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\}$.

Tenemos que:

1) f es discontinua en $A \setminus \{0\}$.

2) f es continua en $\mathbb{R} \setminus A$.

3) El punto $x=0$ hay que estudiarlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq 2 = f(0)$, la función no es continua en $x=0$.

Por tanto,

f es continua en $\mathbb{R} \setminus \bigcup_k \{k\pi\}$

Note: La discontinuidad en $x=0$ es evitable.
| $k\pi, k \neq 0$, es esencial.
(de salto infinito).

$$b) f(x) = \begin{cases} 0 & x=0, \\ \frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} & x \neq 0. \end{cases}$$

Posibles puntos de discontinuidad:

$$\begin{cases} x=0 \\ x / 1-e^{1/x} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{No tiene solución: } e^{1/x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0 \nrightarrow.$$

Estudiamos $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} = \left(\frac{\infty}{-\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x} + 1}{e^{-1/x} - 1} = -1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} = 1$$

Como no existe el límite, f es discontinua en $x=0$.
Esto es, f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

↑ discontinuidad
de salto con salto 2.

Ejercicio: [Teorema del Punto Fijo de Brouwer]
(en una variable)

29.

$F: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continua $\stackrel{?}{\Rightarrow} \exists x_0 \in [0,1] / F(x_0) = x_0$
"punto fijo"

Dem: Sea $g(x) = F(x) - x$.

1) Si $F(0)=0$ o $F(1)=1$, ya tendríamos un punto fijo.

2) Venos pues el caso cuando $F(0) \neq 0$, $F(1) \neq 1$.

Como $F: [0,1] \rightarrow [0,1]$, si $F(0) \neq 0 \Rightarrow F(0) > 0$,

$$F(1) \neq 1 \Rightarrow F(1) < 1.$$

Entonces,

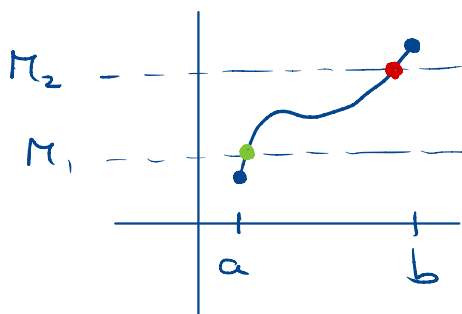
$$\left. \begin{array}{l} g(0) = F(0) > 0 \\ g(1) = F(1) - 1 < 0 \\ g \text{ continua en } [0,1] \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (0,1) / g(x_0) = 0.$$

Esto es, $\exists x_0 \in (0,1) / F(x_0) = x_0$.

Junt con el caso 1), esto prueba que $\exists x_0 \in [0,1] /$
 $F(x_0) = x_0$.

• Teorema de los valores intermedios:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a) < f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall M \in (f(a), f(b)),$$
$$\exists x_0 \in (a,b) / f(x_0) = M.$$



Dem: [Gordario de Bolzano]

Dado $M \in (f(a), f(b))$, definimos

$$g(x) = f(x) - M. \text{ Entonces,}$$

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ continua en } [a, b] \\ g(a) = f(a) - M < 0 \\ g(b) = f(b) - M > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) / g(x_0) = 0 //$$

• Teorema de la acotación:

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces f acotada en $[a, b]$.

Nota: El intervalo tiene que ser cerrado y acotado.

Ej: $\frac{1}{x}$ en $(0, 1]$ no es acotada.

• Teorema de Weierstrass:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ existen el mínimo y máximo absoluto de f en $[a, b]$.

Ejercicio: 28. Dado $a \in (0, \frac{1}{2})$, probar que $x2^x + a = 0$ tiene al menos dos soluciones negativas, una menor y otra mayor que -1 .

Sol.

$$f(x) = x \cdot 2^x + a$$

$$f(0) = a > 0$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2} + a = -\frac{1}{2} + a < 0$$

f continua en $[-1, 0]$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = a > 0 \\ f(-1) = -\frac{1}{2} + a < 0 \\ f \text{ continua en } [-1, 0] \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (-1, 0) / f(x_0) = 0.$$

Para encontrar la otra raíz, notamos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x2^x + a = a > 0.$$

Esto es, $\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0$ / si $x \leq -k$, entonces

$$f(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Tomando $\varepsilon = \frac{a}{2}$,

tenemos que $\exists k > 0$ / si $x \leq -k \Rightarrow f(x) > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$.

Luego $f(-1) < 0$

$f(-k) > 0$

f continua en $[-k, -1]$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) < 0 \\ f(-k) > 0 \\ f \text{ continua en } [-k, -1] \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (-k, -1) / f(x_0) = 0.$$

33. f continua en I interval, $x_1, \dots, x_n \in I$. [No hecho en clase]

$$1) \text{ d } \exists c \in I / f(c) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} ?$$

$$\text{Sea } z \in \{x_1, \dots, x_n\} / f(z) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} f(x_i),$$

$$w \in \{x_1, \dots, x_n\} / f(w) = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} f(x_i).$$

$$\text{Entonces, } \left. \begin{aligned} \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} &\geq \frac{n f(w)}{n} = f(w), \\ \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} &\leq \frac{n f(z)}{n} = f(z). \end{aligned} \right\}$$

Caso 1: $f(x_1) = \dots = f(x_n)$.

Entonces trivial, pues $\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} = f(x_i) \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Caso 2: $\exists i \neq j \in \{1, \dots, n\} / f(x_i) < f(x_j)$.

$$\text{Entonces, } f(w) < \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} < f(z).$$

Como f continua en $[w, z]$ } Por el Teo. Valores interm.,
 $f(w) < f(z)$ existe un punto $x_0 \in (w, z) /$

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \quad \nearrow$$

2) Sea t el tiempo medido en minutos.

Definimos $d(t)$ como la distancia recorrida entre los instantes $t-1$ y t , que es una función continua de t (*).

Tenemos que:

$$d(1) + d(2) + \dots + d(50) = 100$$

$$\text{¿ } \exists t \in [1, 50] / d(t) = 2?$$

Si, por 1) sabemos que existe $t \in [1, 50] /$

$$d(t) = \frac{d(1) + \dots + d(50)}{50} = \frac{100}{50} = 2 //$$

Clase 15: Derivadas

Repasemos el concepto de derivada y cómo calcularla.

• Def: Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$, se dice que f es derivable en x_0 si existe y es finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

El valor del límite se llama derivada de f en x_0 ,

y se denota
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nota: Equivalentemente, (cambio $h = x - x_0 \leadsto x = h + x_0$)

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

• Dado un conjunto $D \subset \mathbb{R}$, f es derivable en D si lo es en todo $x \in D$. En ese caso,

$$\left. \begin{array}{l} f': D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array} \right\} \text{ se llama función derivada.}$$

• Ejemplo:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \dot{f}'(x_0)$?

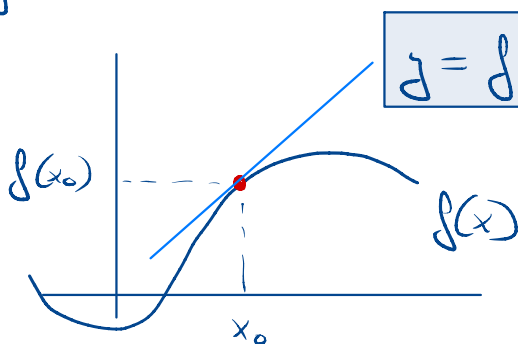
2) $g(x) = \log(x)$, $x_0 > 0 \rightarrow \dot{g}'(x_0)$?

Sol: Usando la definición,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0. \end{aligned}$$

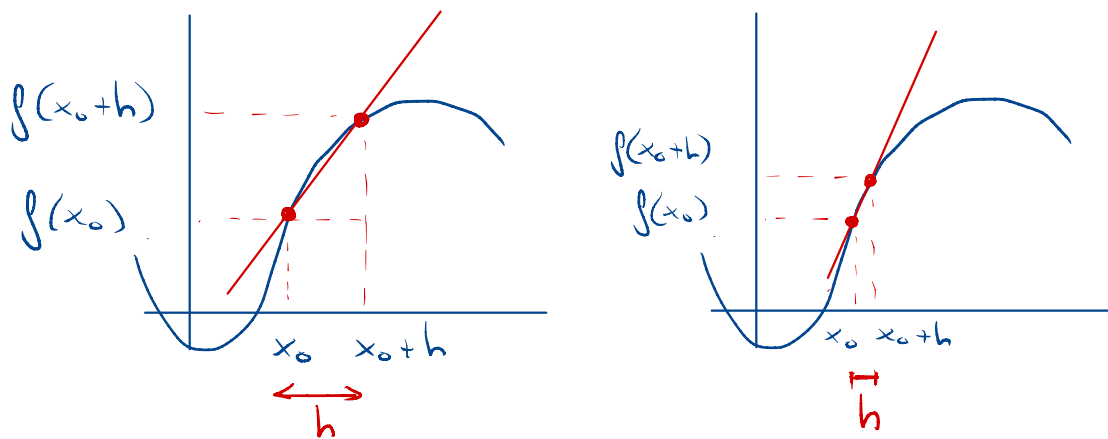
$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log(x) - \log(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log\left(\frac{x}{x_0}\right)}{x - x_0} = \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log\left(1 + \frac{x}{x_0} - 1\right)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)}{\frac{x - x_0}{x_0} \cdot x_0} = \frac{1}{x_0}. \end{aligned}$$

• Dada $f(x)$, el valor $f'(x_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en x_0 :



$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Recta tangente a f en x_0 .



• Teorema: f derivable en $x_0 \Rightarrow f$ continua en x_0

Dem: f derivable $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (finito).

Entonces,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0).$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow 0} = f(x_0).$$

Nota: Al revés no es cierto.

$f(x) = |x|$ continua en $\mathbb{R}$, no derivable en $x=0$.

$f(x) = \sqrt{x}$ continua en $[0, \infty)$, no derivable en $x=0$.

→ Repasan propiedades básicas del cálculo de derivadas (apuntes).

• Teorema: [Regla de la cadena]

$\left. \begin{array}{l} f \text{ derivable en } x_0 \\ g \text{ derivable en } f(x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ derivable en } x_0,$

y se tiene que

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Dem:

$$\underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}}_{\rightarrow (g \circ f)'(x_0)} = \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}_{\rightarrow g'(f(x_0))} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)}$$

• Teorema: [Derivada de la función inversa]

Sea f inyectiva y continua en el intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$.

Si

$\left. \begin{array}{l} f \text{ derivable en } x_0 \in I \\ f'(x_0) \neq 0 \end{array} \right\} \text{ entonces } f^{-1} \text{ es derivable en } f(x_0),$

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dem: Denotamos $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$,

$$\underbrace{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}}_{\rightarrow (f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0))} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}}}$$

• Ejemplo: $f(x) = \sin(x)$,

En $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$

$$f'(x) = \cos(x) \rightarrow \text{¿ } \frac{d}{dx} \arcsin(x)?$$

Sol:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\text{Por tanto, } (f^{-1})'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}}$$

Luego

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$\text{Esto es, } \frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

18.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} \cdot x & x > 0 \\ \frac{x}{1 + e^{1/x}} & x < 0 \end{cases}$$

a) ¿ $f(0)$ / f continua en $x=0$?

$$\begin{aligned} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \cdot x = (\infty \cdot 0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{-\frac{1}{x}} + 1}{e^{-\frac{1}{x}} + 1} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \end{aligned}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 + e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

Por tanto, definiremos $f(0) = 0$ y f será continua en $\mathbb{D}$.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 1.$$

Luego f es derivable en $\mathbb{R}$.

Además,

$$f'(0) = 1,$$

$$\text{si } x > 0, f'(x) = \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{1/x}} + x \frac{e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}(1+e^{\frac{1}{x}}) - (2+e^{\frac{1}{x}})e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}{(1+e^{1/x})^2} =$$

$$= \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{1/x}} + \frac{1}{x} \frac{e^{1/x} + e^{2/x}}{(1+e^{1/x})^2},$$

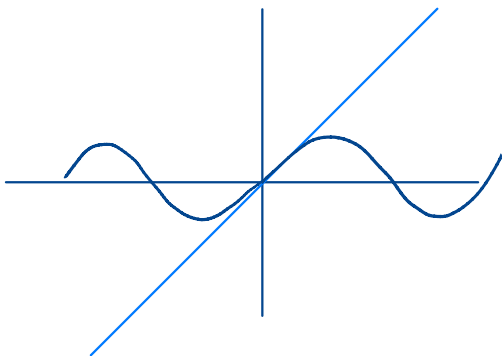
$$\text{si } x < 0, f'(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}} - \frac{x}{(1+e^{1/x})^2} e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}.$$

Clase 16: Prueba.

→ Cerca de $x=0$, $\sin(\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \sin(x) \approx x \text{ para } \underline{x \approx 0}$$

Lo vemos en la gráfica:



Esto es,

$$\sin(\text{"algo pequeño"}) \approx \text{"algo pequeño"}$$

Por ejemplo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$, pues para

$x \simeq +\infty$ tenemos $\frac{1}{x} \simeq 0$, luego

$\sin(\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

No confundir con $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$!