

Clase 17: Aproximación lineal y derivación implícita.

Derivación implícita

En ocasiones, no conocemos $f(x)$ explícitamente, pero sabemos que resuelve una ecuación.

Es decir, si llamamos $y = f(x)$ y nos dan la

ecuación $F(x, y) = 0$, podemos despejar y en

función de $x \rightarrow y = y(x)$.

En general, obtener la expresión $y = y(x)$ a partir de $F(x, y) = 0$ es difícil o imposible.

1) ¿Dado un x_0 , cómo podemos saber $y(x_0)$?

↳ Normalmente, solo numéricamente.

(p.ej. con Bisección y método de bisección).

2) Si nos dan como dato $y_0 = y(x_0)$, esto es, $F(x_0, y_0) = 0$,

¿cómo calculamos $y'(x_0)$?

→ Derivamos en la ecuación $F(x, y(x)) = 0$ usando la regla de la cadena, evaluamos luego en x_0 , y despejamos $y'(x_0)$.

Ejemplo:

13. d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, $(2, 2)$

¿ $y'(2)$? ¿ Recta tangente y normal a $y(x)$ en $(2, 2)$? ¿ Punto con tangente horizontal?

Sol:

Derivamos en x la ec. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y(x)} = 1$:

$$\frac{-1}{x^2} - \frac{1}{(y(x))^2} y'(x) = 0 \quad (*)$$

Evaluamos en $x = 2$, $y(2) = 2$:

$$\frac{-1}{4} - \frac{1}{4} y'(2) = 0 \Rightarrow y'(2) = -1.$$

Recta Tangente: $z - y(2) = y'(2)(x - 2)$

$$\hookrightarrow z - 2 = -1(x - 2) \Rightarrow z = -x + 4.$$

Recte normal:

$$z - y(2) = \frac{-1}{y'(2)} (x - 2)$$

$$\hookrightarrow z - 2 = (x - 2) \rightarrow z = x.$$

$$dx / y'(x) = 0?$$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow (*) \leadsto \frac{-1}{x^2} = 0 \rightarrow \text{No existen.}$$

$$f) \sin(xy) + y^2 = 2, (0, -\sqrt{2})$$

Sol. $\frac{d}{dx} \leadsto$

$$\cos(xy(x)) (y(x) + xy'(x)) + 2y(x)y'(x) = 0$$

$$y(0) = -\sqrt{2} \rightarrow \cos(0)(-\sqrt{2} + 0) - 2\sqrt{2}y'(0) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y'(0) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Tangent: } z + \sqrt{2} = -\frac{1}{2}x, \text{ Normal: } z + \sqrt{2} = 2x$$

Tangentes

horizontales: $y'(x) = 0 \Rightarrow \cos(xy(x))y(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(x) = 0 & \textcircled{1} \\ \cos(xy(x)) = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \sin(0) + 0^2 = 2 \rightarrow \text{falso}$$

$$\textcircled{2} x y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Uparrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + y(x)^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(x)^2 = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 2 - (-1)^k.$$

Es decir, la función tiene tangente horizontal en

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{\sqrt{2 - (-1)^k}}, k \in \mathbb{Z}.$$

Diferencial

Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in [a, b]$, esto es,

$$\exists f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

tenemos que $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Es decir, $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ es un infinitésimo de mayor orden que $x - x_0$:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0).$$

Por ello, en primera aproximación,

$$\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\substack{\Delta f \\ \text{Incremento de } f}} \simeq \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\substack{\Delta x \\ \text{Incremento de } x}} \leadsto$$

$$\leadsto \Delta f \simeq f'(x_0) \Delta x \leadsto df = f'(x_0) dx \leadsto f'(x_0) = \frac{df}{dx}.$$

- En resumen, podemos aproximar $f(x)$ cerca de un punto x_0 :

$$\|f(x) \simeq f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\substack{\simeq \text{error cometido} \\ \text{(de primer orden)}}}\| \quad \text{(esto es, por su recta tangente en el punto).}$$

Clases 18, 19: Ejercicios Derivabilidad.

Ejercicio: 11

Se mide el radio de una bola y se obtiene como resultado 10 cm con un error de ± 1 cm.

- 1) ¿Cuál será el error al calcular el volumen?
- 2) ¿Con qué precisión debemos medir el radio para que el error en el volumen no supere $\pm 0.1 \text{ cm}^3$?

Sol. $V = V(R) = \frac{4}{3} \pi R^3.$

$$R = R_0 + \Delta R \Rightarrow$$

$\underbrace{\quad\quad}_\text{medición} \quad \underbrace{\quad\quad}_\text{error}$

$$\Rightarrow V(R) = V(R_0 + \Delta R) \approx V(R_0) + V'(R_0) \Delta R$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_\text{valor aprox.} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_\text{error cometido.}$

Por tanto, tenemos que si $R_0 = 10$, $|\Delta R| = 1$,

- $V(R_0) = \frac{4}{3} \pi R_0^3 = \frac{4}{3} \pi 10^3,$

- Error en cálculo de volumen $\approx |V'(R_0) \Delta R| =$
 $= 4 \pi R_0^2 |\Delta R| = 4 \pi 10^2 \cdot 0.1 = 40 \pi.$

Nota: Lo anterior es el procedimiento general, que nos da una aproximación de cómo se propaga el error de medición:

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{error propagado}} \approx \underbrace{f'(x_0)}_{\text{error medida}} \Delta x$$

En este ejemplo particular, podríamos calcular el error máximo exacto:

$$\begin{aligned} V(R_0 + \Delta R) &= \frac{4}{3} \pi (R_0 + \Delta R)^3 = \\ &= \frac{4}{3} \pi (R_0^3 + \Delta R^3 + 3R_0 \Delta R^2 + 3R_0^2 \Delta R) = \\ &= \underbrace{\frac{4}{3} \pi R_0^3}_{\text{valor obtenido}} + \underbrace{\frac{4}{3} \pi \Delta R^3 + 4\pi R_0 \Delta R^2 + 4\pi R_0^2 \Delta R}_{\text{error propagado}} \end{aligned}$$

→ Si ΔR es pequeño, entonces $\Delta R^2, \Delta R^3$ son mucho más pequeñas que ΔR . Luego el error principal es $4\pi R_0^2 \Delta R$.

Esto es justamente el error lineal o de primer orden: $V'(R_0) \Delta R$.

Ejercicios: 23, 17b), 16, 21c), 26f), 25c).

23 Sea $p \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - e^{-x^2})^p$.

a) $\text{Dom}(f)$.

b) Continuidad, derivabilidad en $x_0 \neq 0$; calcular f' .

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

d) Derivabilidad de segundo orden en $x_0 = 0$.

Sol:

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} \in (0, 1)$, luego
 $1 - e^{-x^2} > 0$.

Por tanto, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, para cualquier $p \in \mathbb{R}$.

b) Sea $x_0 \neq 0$. Entonces, f es continua y derivable en x_0 , pues está dada por composición de funciones que lo son.

Calculamos f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(1 - e^{-x^2})^{p-1} \cdot (-e^{-x^2} \cdot (-2x)) = \\ &= 2px \cdot e^{-x^2} (1 - e^{-x^2})^{p-1}. \end{aligned}$$

c)

Como $1 - e^{-0^2} = 0$, estudiemos los casos

- ① $p > 0$
- ② $p = 0$
- ③ $p < 0$

Continuidad:

① $p > 0$:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{-x^2})^p = \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{-x^2}) \right)^p = 0.$$

luego f es continua en $x = 0$.

② $p = 0$: $f(x) = 1 \Rightarrow$ continua y derivable en $\mathbb{R}$.

③ $p < 0$: $f(x) = \frac{1}{(1 - e^{-x^2})^{|p|}}$ no es continua en $x = 0$.

Derivabilidad:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-x^2})^p}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} x^2 \right)^p = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^{2p}}{x} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } 2p - 1 > 0 \\ \neq & \text{si } 2p - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \left[e^{g(x)} \sim 1 + g(x) \text{ cuando } g(x) \sim 0 \right]$$

③ No es derivable puesto que no es continua.

d) Sea $p > 1/2$. Como f es derivable γ

$$f'(x) = \begin{cases} 2p x \cdot e^{-x^2} (1 - e^{-x^2})^{p-1} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

estudiamos la derivabilidad de f' en $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} 2p e^{-x^2} (1 - e^{-x^2})^{p-1} = \\ &= 2p \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{-x^2})^{p-1} = \begin{cases} 2p & \text{si } p=1 \\ 0 & \text{si } p>1 \\ +\infty & \text{si } 1/2 < p < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego f es dos veces derivable si $p \geq 1$ o $p=0$.

17

b) $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x^b) & x \in (0, 1), \\ a & x \notin (0, 1). \end{cases}$

Sol:

f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$.

Estudiamos $x=0$ y $x=1$.

Vemos primero la continuidad:

• $x=0$: $f(0) = a$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(\pi x^b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b > 0 \\ -1 & \text{si } b = 0 \\ \nexists & \text{si } b < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a$$

Luego f continua en $x=0$ si $a=1$ y $b>0$,
o si $a=-1$ y $b=0$.

• $x=1$: $f(1) = a$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos(\pi x^b) = \cos(\pi) = -1.$$

Luego f continua en $x=1$ si $a=-1$, $b \in \mathbb{R}$.

Derivabilidad

$x=0$: Necesitamos $a=1, b>0$ o $a=-1, b=0$.

1) $a = -1, b = 0$: $f(x) = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ dérivable.

2) $a = 1, b > 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\pi x^b) - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\pi x^b) - 1}{-(\pi x^b)^2/2} \cdot \frac{-(\pi x^b)^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\pi^2 x^{2b-1}}{2} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 2b-1 > 0 \\ -\pi^2/2 & \text{si } 2b-1 = 0 \\ -\infty & \text{si } 2b-1 < 0 \quad (b > 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a - a}{0} = 0.$$

Donc f dérivable en $x = 0$ si $a = 1, b > 1/2$.

$x = 1$: $a = -1, b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a - a}{x - 1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos(\pi x^b) + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\sin(\pi x^b) \pi b x^{b-1}}{1} = 0.$$

Donc f dérivable en $x = 1$ à este cas.

Resumen:

f derivable en $x=0$ si $\begin{cases} a=1, b>1/2 \\ a=-1, b=0. \end{cases}$

f derivable en $x=1$ si $a=-1, b \in \mathbb{R}$.

16. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$

- Tangente en $x=\sqrt{2}$.
- Punto de tangencia horizontal, y punto con tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Sol:

$$f'(x) = \frac{(1+2x^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2} (1+2x^2)^{1/2} \cdot 4x}{(1+2x^2)^3} = \frac{1+2x^2 - 6x^2}{(1+2x^2)^{5/2}} = \frac{1-4x^2}{(1+2x^2)^{5/2}}$$

$$\text{En } x=\sqrt{2}: f'(\sqrt{2}) = \frac{1-4 \cdot 2}{(1+2 \cdot 2)^{5/2}} = \frac{-7}{5^{5/2}},$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{5^{3/2}}.$$

Por tanto,

$$\text{recta tangente } y - f(2) = f'(2)(x - \sqrt{2}).$$

- ¿Tangente horizontal? $\rightarrow f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-4x^2}{(1+2x^2)^{5/2}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm \frac{1}{2}}.$$

- ¿Paralela a $y = x$? $\rightarrow f'(x) = 1$.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1-4x^2}{(1+2x^2)^{5/2}} = 1 \Leftrightarrow 1-4x^2 = (1+2x^2)^{5/2}$$

Vemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ no se tiene que

$1-4x^2 < 0$ y $1+2x^2 > 0$, luego no pueden ser iguales.

En $\boxed{x=0}$ sí se cumple la igualdad.

21 Continuidad y derivabilidad.

⇒

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(|x|^p \log|x|) & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ x^p \log(x) & x > 0. \end{cases}$$

Sl:

$f(x)$ continua y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En $x=0$ tenemos que estudiarlo.

Vemos que los casos $p > 0$, $p = 0$ y $p < 0$ son muy distintos.

$$p > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \log(x) = (0 \cdot \infty) = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan(|x|^p \log|x|) = \\ &= \arctan\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|^p \log|x|\right) = \arctan(0) = 0. \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, f continua en $x=0$.

Estudiamos si es derivable:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^p \log(x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{p-1} \log(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } p-1 > 0 \\ -\infty & \text{si } p-1 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arctan(|x|^p \log|x|)}{-|x|} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{\frac{\arctan(|x|^p \log|x|)}{|x|^p \log|x|}}_{\rightarrow 1 \text{ pues } |x|^p \log|x| \rightarrow 0} \frac{|x|^p \log|x|}{-|x|} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -|x|^{p-1} \log|x| = \begin{cases} 0 & \text{si } p-1 > 0 \\ -\infty & \text{si } p-1 \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego f es derivable en $x=0$ si $p > 1$.

$$\boxed{p=0} \quad f(x) = \begin{cases} \arctan(\log|x|) & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ \log(x) & x > 0. \end{cases}$$

No es continua en $x=0$ (por tanto tampoco derivable).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

$p < 0$ No es continua en $x=0$ pues

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \log(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{x^{-p}} = -\infty.$$

En resumen,

| si $p \in (0, 1)$, f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
| si $p > 1$, f es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

26 En el punto indicado, calcular y' , hallar rectas tangente y normal. Determinar puntos con tangente horizontal.

f) $\arctan(x+y) = xy, (0,0)$

$$\arctan(x+y(x)) = xy(x) \rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+(x+y(x))^2} (1+y'(x)) = y(x) + xy'(x) \quad (*)$$

$$\text{En } x=0, y(0)=0 \Rightarrow (1+y'(0))=0 \Rightarrow y'(0)=-1.$$

- Recta tangente: $z = -x$
• normal: $z = x$.

• Tangente horizontal: $y'(x) = 0$

Sustituimos en (*): $\frac{1}{1+(x+y(x))^2} = y(x)$

Buscamos (x, y) solución del sistema no lineal
dado por:

$$\begin{array}{l} \arctan(x+y) = xy \\ \frac{1}{1+(x+y)^2} = y \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} x+y = \tan(xy) \\ \downarrow \\ \rightarrow y = \frac{1}{1+\tan^2(xy)} \Rightarrow \end{array}$$

Denotamos $z = \tan(xy)$:

$$\begin{array}{l} x+y=z \\ y = \frac{1}{1+z^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow x + \frac{1}{1+z^2} = z \Rightarrow x = z - \frac{1}{1+z^2} \end{array}$$

Si encontramos los valores de z , tenemos los puntos
 x y su valor $y(x)$:

$$\arctan(z) = \left(z - \frac{1}{1+z^2}\right) \cdot \frac{1}{1+z^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arctan(z) - \frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{(1+z^2)^2} = 0$$

Estudiamos las soluciones de esta ecuación:

Definimos $g(z) = \arctan(z) - \frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{(1+z^2)^2}$, que es continua en $\mathbb{R}$.

Vemos que $g(0) = 1$, y $\lim_{z \rightarrow -\infty} g(z) = -\frac{\pi}{2}$,

luego $\exists k > 0 / g(-k) < 0$.

Por tanto, hemos encontrado un valor $z^* \in (-k, 0) /$

$$g(z^*) = 0.$$

Así, $x^* = z^* - \frac{1}{1+(z^*)^2}$ es un punto donde la tangente es horizontal.

→ Se puede probar que este es el único punto donde y' se anula, pero necesitamos más teoría (siguiente tema).

25

c) Estimar la variación del área de un cuadrado si su diagonal aumenta de $d = \sqrt{2}$ a $d = 3/2$.

Sol: Área $\equiv A = L^2$, $L \equiv$ longitud lado.

Por Pitágoras, $d = \sqrt{2} L \Rightarrow A = \frac{d^2}{2}$

A order linear, $\Delta A = A'(d) \Delta d$.

Calculamos $A'(d) = d$.

Por tanto, $A(\sqrt{2}) - A(\frac{3}{2}) \approx A'(\frac{3}{2})(\sqrt{2} - \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}(\sqrt{2} - \frac{3}{2})$.

Nota: También valdría

$$A(\frac{3}{2}) - A(\sqrt{2}) \approx A'(\sqrt{2})(\frac{3}{2} - \sqrt{2}) = \sqrt{2}(\frac{3}{2} - \sqrt{2}).$$