

TEMA 2: Soluciones

Nota: Si erratas/errores,
email egarcia12@us.es

1.

Comprobar: wolframalpha.com.

$$a) \sqrt[4]{(2x-15)^4} = 10 \Leftrightarrow |2x-15| = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-15 \geq 0 & y & 2x-15=10 \rightarrow x = \frac{25}{2} \\ (x \geq \frac{15}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-15 < 0 & y & 15-2x=10 \rightarrow x = \frac{5}{2} \\ (x < \frac{15}{2}) \end{cases}$$

Das soluciones: $x = \frac{5}{2}, x = \frac{25}{2}$.

$$b) \sqrt{(3-2x)^2} + x = 3 \Leftrightarrow |3-2x| = 3-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \geq 0 & y & 3-2x = 3-x \rightarrow x = 0 \\ (x \leq \frac{3}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3-2x < 0 & y & 2x-3 = 3-x \rightarrow x = 2 \\ (x > \frac{3}{2}) \end{cases}$$

Soluciones $x = 0, x = 2$.

$$c) 2\sqrt[4]{(5-4x)^4} = x+2 \Leftrightarrow 2|5-4x| = x+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-4x \geq 0 & y & 10-8x = x+2 \rightarrow x = \frac{8}{9} \leq \frac{5}{4} \\ (x \leq 5/4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5-4x < 0 & y & 8x-10 = x+2 \rightarrow x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} > \frac{5}{4} \\ (x > 5/4) \end{cases}$$

Sol. $x = \frac{8}{9}, x = \frac{4}{3}$

d) $2|3x-1| = \sqrt{(x-7)^2} \Leftrightarrow 2|3x-1| = |x-7|$

• $3x-1 \geq 0 : x-7 \geq 0 : 6x-2 = x-7 \rightarrow x = -1$ ✗
 $(x \geq 1/3) \quad (x \geq 7)$

• $x-7 < 0 : 6x-2 = 7-x \rightarrow x = \frac{9}{7}$
 $(x < 7)$

• $3x-1 < 0 : x-7 \geq 0 : 2-6x = x-7 \rightarrow x = \frac{9}{7}$ ✗
 $(x < 1/3) \quad (x \geq 7)$

• $x-7 < 0 : 2-6x = 7-x \rightarrow x = -1$
 $(x < 7)$

Sol. $x = \frac{9}{7}, x = -1$

e) Igual

Nota: $n \in \mathbb{N}, (x^{2n})^{1/2n} = |x|, (x^{2n+1})^{\frac{1}{2n+1}} = x$.

2.

$$a) \sqrt[6]{(2x+1)^6} > 3 \Leftrightarrow |2x+1| > 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$$

Nota: Ya hemos hecho muchas veces algunas cosas frecuentes,

$$|x-a| < b \Leftrightarrow x \in (a-b, a+b)$$

$$|x-a| > b \Leftrightarrow x \in (-\infty, a-b) \cup (a+b, \infty).$$

$$b) 2^{x^2} \geq 4^{x+1} = 2^{2x+2}$$

Opción 1: Como $\log_2(x)$ es estruct. creciente,

$$2^{x^2} \geq 2^{2x+2} \Leftrightarrow x^2 \geq 2x+2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}, \infty).$$

Opción 2: [Para evitar trabajar con logaritmos en otras bases que no sean e].

$$2^{x^2} = e^{\ln 2^{x^2}} = e^{x^2 \ln 2}$$

$$2^{2x+2} = e^{\ln 2^{2x+2}} = e^{(2x+2) \ln 2}$$

Así, como $\ln(x)$ es estruct. creciente,

$$e^{x^2 \ln 2} \geq e^{(2x+2) \ln 2} \Leftrightarrow x^2 \ln 2 \geq (2x+2) \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 \geq 0.$$

$$c) x^2 < \sqrt[3]{1-x^3}$$

Como x^3 est. dec.,

$$x^2 < \sqrt[3]{1-x^3} \Leftrightarrow x^6 < 1-x^3 \Leftrightarrow x^6 + x^3 - 1 < 0.$$

$$\text{Denotamos } z = x^3: z^2 + z - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(z - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Esto es,

$$x^2 < \sqrt[3]{1-x^3} \Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x^3 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Como $x^{1/3}$ est. creciente, obtenemos

$$x \in \left(\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1/3}, \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/3}\right)$$

3.

a) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$$

b) $f(x) = \sqrt{1-x}$

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 1-x \geq 0\} = (-\infty, 1]$$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2-x}}$

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{2-x} \geq 0\} = (-\infty, 1] \cup (2, \infty)$$

d) $f(x) = \log(x^2-4)$

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2-4 > 0\} = (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$$

e) $f(x) = \log(\log(x))$

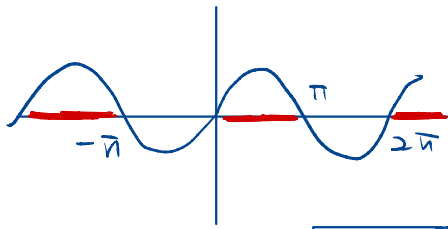
$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, \log(x) > 0\} = (e, \infty).$$

f) $f(x) = \sin \sqrt{2x-1}$

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 2x-1 \geq 0\} = \left[\frac{1}{2}, \infty\right).$$

g) $f(x) = \log(\sin(x))$

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, 2k\pi + \pi).$$



$$h) f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{2-|x|}}$$

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1-|x|}{2-|x|} \geq 0\} = \\ &= [-1, 1] \cup (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \end{aligned}$$

$$i) f(x) = \log\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4x + 6}\right)$$

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4x + 6} > 0\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Estudiar } x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ y } x^2 + 4x + 6 > 0 \text{ y} \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \text{ y } x^2 + 4x + 6 < 0. \quad (\dots) \end{aligned}$$

4. a) Hecho en clase.

$$b) f(x) = a^x + a^{-x}.$$

$$f(-x) = a^{-x} + a^x = f(x) \Rightarrow f \text{ es par.}$$

$$c) f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$f(-x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \log\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\right) = -\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x) \Rightarrow \text{impar.}$$

$$d) f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$f(-x) = \log(-x + \sqrt{1+x^2}) \quad \text{no es par ni impar.}$$

5. Hecho en clase.

6. a) Como b),

$$b) f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Como $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Dom}(f^{-1}) \subset (0, \infty)$.

$$\text{Sea } y > 0: f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) = \frac{2^x}{1+2^x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + \underset{y \neq 0}{2^x}(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1-y}{y}.$$

Como $2^x > 0$, vemos que necesitamos $\frac{1-y}{y} > 0$.

Como $y > 0$, esto requiere $y < 1$.

Así, para $y \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) = x &\Leftrightarrow 2^x = \frac{1-y}{y} \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = \frac{1-y}{y} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \ln 2 = \ln \frac{1-y}{y} \Leftrightarrow x = \frac{\ln(\frac{1-y}{y})}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\left. \begin{aligned} f^{-1}: (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{\ln(\frac{1-x}{x})}{\ln 2} \end{aligned} \right\}$$

$$\circ) f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}, \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{Dado } y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) = x &\Leftrightarrow y = f(x) = \sqrt[3]{1-x^3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^3 = 1-x^3 \Leftrightarrow x^3 = 1-y^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1-y^3}. \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto, } \bar{f}^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x^3}.$$

Nota: Vemos que en este ejemplo $f = \bar{f}^{-1}$.
En efecto,

$$f(f^{-1}(x)) = \sqrt[3]{1-(f^{-1}(x))^3} = \sqrt[3]{1-(1-x^3)} = x = \bar{f}^{-1}(f(x)).$$

7.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{5}{x^3}} = 0,$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x^{1/3}}{2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^{2/3}}}{\frac{2}{x} + 1} = 0,$$

$$\begin{aligned} c) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) &= (\infty - \infty) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1 \end{aligned}$$

d) Como c)

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} = \frac{2}{3}.$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 2x^2 - 6x + 6} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Factorizar num. y denom. dividiendo por $(x-1)$.

(...)

8

a) $+\infty$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{(x-1)(\cancel{x-2})} = 4.$$

c), d) En clase

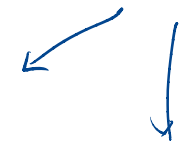
e) Conjugados.

$$f) \text{ No } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^1 = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$$

g) No

(Nota: Se pueden demostrar sin L'Hôp, pero más difícil)

9. a), b), c) Por L'Hôpital 

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \text{ (L'Hôpital)}$$

a), c) En clase

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

• Vale con saber que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2/2} = 1$, o L'Hôpital.

Si quisiéramos hacerlo usando solo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, podemos usar trigonometría:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} \stackrel{z = \frac{x}{2}}{\downarrow} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^2(z)}{2z^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

d) De nuevo, podemos usar L'Hôpital o que $\tan(x) \sim x$ en $x = 0$ (sin necesidad de justificar).

Si queremos hacerlo sabiendo solo $\sin(x) \sim x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x \cdot \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

11. a) En clase.

$$\begin{aligned} b) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(e^x + x)}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(e^x(1 + e^{-x}x))}{x}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x + \ln(1 + e^{-x})}{x}} = e^{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x}}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} x = 0$, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^{-x} x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^{-x} x)}{e^{-x} x} e^{-x} = 1.$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} = e^2.$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(ax))^{1/x^2} = L.$

• Si $a = 0$, entonces $\cos(ax) = 1$, luego $L = 1$.

• Si $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(ax))^{1/x^2} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\cos(ax))}{x^2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos(ax) - 1)}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos(ax) - 1)}{\cos(ax) - 1} \frac{\cos(ax) - 1}{x^2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{a^2 x^2 / 2} \cdot \frac{-a^2}{2}} = e^{-\frac{a^2}{2}}. \end{aligned}$$

12.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(e^x - 1)}{x} = 1 ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{e^x - 1}{e^x} \cdot e^x\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right) + \log(e^x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right) + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 0 + 1 = 1.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(e^{-x} + x^4)}{4 \log(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{e^{-x} + x^4}{x^4} x^4\right)}{4 \log(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{e^{-x} + x^4}{x^4}\right)}{4 \log(x)} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^4)}{4 \log(x)} = 0 + 1 = 1.$$

c) Igual que b).

$$13. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty. \quad \left| \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{|x-1|} = +\infty. \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{|x-1|} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x-1|} = -1.$$

17.

a), b), e) Igual que 1, 2.

$$c) x^2 < \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^4 < 1-x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 1 < 0$$

Sea $z = x^2$:

$$z^2 + z - 1 = \left(z - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(z - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$\text{Esto es, } \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x^2 < \overbrace{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{>0},$$

$$\text{es decir, } x^2 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right).$$

$$d) 2 \log \sqrt{x} - \log(1-x) = 2$$

$$2 \log(\sqrt{x}) - \log(1-x) = \log\left(\frac{(\sqrt{x})^2}{1-x}\right) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^2 \Leftrightarrow x(1+e^2) = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2}{1+e^2} \in (0, 1).$$

18.

$$a) f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

$$\text{Dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+1} > 0, \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \geq 0 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+1} > 0, \frac{x-1}{x+1} \geq 1 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+1} \geq 1 \right\}.$$

$$\bullet \frac{x-1}{x+1} \geq 1 \iff \frac{x-1}{x+1} - 1 \geq 0 \iff \frac{x-1-x-1}{x+1} \geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{-2}{x+1} \geq 0 \iff x < -1.$$

$$\text{Por tanto, } \text{Dom}(f) = (-\infty, -1).$$

$$b) f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\text{Dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{x+2} \geq 0, 1+x > 0, 1-x \geq 0 \right\} =$$

$$= (-1, \infty) \cap (-\infty, 1] \cap \left[(-\infty, -2) \cup [2, \infty) \right] = (-1, -2).$$

b, c) Iguales.

$$d) f(x) = \sqrt{1 - \log \sqrt{1 - \log(x)}}$$

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0, 1 - \log(x) > 0, 1 - \log \sqrt{1 - \log x} \geq 0\} = \\ &= (0, \infty) \cap \{x \in \mathbb{R} : \log(x) < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : \log \sqrt{1 - \log x} \leq 1\}\end{aligned}$$

• $\log(x) < 1 \Leftrightarrow x \in (0, e)$.

• Con $x \in (0, e)$,

$$\log \sqrt{1 - \log(x)} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \log(x)} \leq e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \log(x) \leq e^2 \Leftrightarrow \log(x) \geq 1 - e^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{-(e^2-1)}.$$

$$\begin{aligned}\text{Asi, Dom}(f) &= (0, \infty) \cap (0, e) \cap [e^{-(e^2-1)}, \infty) = \\ &= [e^{-(e^2-1)}, e)\end{aligned}$$

19. $\text{Dom}(f) = [0, 1]$

a) $g(x) = f(x^2)$: $\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [0, 1]\} = [-1, 1]$.

b) Como f . f En clase.

c) $g(x) = f(x-s)$: $\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} : x-s \in [0, 1]\} =$
 $= [s, s+1].$

d) $g(x) = f(2x+3) \rightarrow \text{Dom}(g) = [-\frac{3}{2}, -1].$

20.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, ¿ $(f \circ f \circ f)(x) = x$?

Nota: El enunciado debería decir "prueba que $(f \circ f \circ f)(x) = x$ en su dominio".

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))),$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{1-x}{-x} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{si } x \neq 0 \end{matrix}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{1-f(f(x))} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = \frac{x}{x+1-x} = x.$$

Por tanto, en $x \neq 0$, $(f \circ f \circ f)(x) = x$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$
 $g(x) = x^2$ } ¿ $f \circ g \neq g \circ f$?

$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$g \circ f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$

Sus dominios son distintos, luego no son la misma función.

21.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+a - x-b}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}} = 0.$$

b) En clase

$$c) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2 - x^{1/3}}{8 - x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(2 - x^{1/3})(4 + x^{2/3} + 2x^{1/3})}{(8 - x)(4 + x^{2/3} + 2x^{1/3})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{8 - x}{(8 - x)(4 + x^{2/3} + 2x^{1/3})} = \frac{1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}.$$

d) En clase.

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x^2} = (1^0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1-x)}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x^2} (-x)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x}}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$, el límite no existe.

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x)^{1/x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x)^{1/x^2} = +\infty.$$

22.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}} + 1}, \quad \text{Vemos que no existe.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = 0, \text{ pues}$$

$$|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1 \quad \forall x \text{ (acotado)}$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin(\frac{1}{x}) \text{ no existe.}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin(\frac{1}{x})}$$

$$\text{Como } \frac{x}{3} \leq \frac{x}{2 + \sin(\frac{1}{x})} \leq x, \text{ por la regla del}$$

$$\text{Sandwich tenemos } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin(\frac{1}{x})} = 0.$$

c) $\nexists$ (laterales)

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x)}{\cos(2x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)\cos(2x)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(y + \frac{\pi}{4}) - \sin(y + \frac{\pi}{4})}{\cos(y + \frac{\pi}{4})\cos(2y + \frac{\pi}{2})} = \end{aligned}$$

$y = x - \frac{\pi}{4}$
↓

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cancel{\cos(y)} \cos(\frac{\pi}{4}) - \cancel{\sin(y)} \sin(\frac{\pi}{4}) - \cancel{\sin(y)} \cos(\frac{\pi}{4}) - \cancel{\cos(y)} \sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4}) (-\sin(2y))} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(y)}{-\sin(2y)} = \lim_{y \rightarrow 0} 2 \frac{\sin(y)}{y} \frac{2y}{\sin(2y)} \frac{y}{2y} = 1.$$

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$$

23.

En clase.

24.

• Ejercicios de continuidad

14.

$$a) f(x) = \begin{cases} 2 & x = 0, \\ \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin(x)} & x \neq 0. \end{cases}$$

Denotemos $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\}$.

Tenemos que:

1) f es discontinua en $A \setminus \{0\}$.

2) f es continua en $\mathbb{R} \setminus A$.

3) El punt $x = 0$ hay que estudiarlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq 2 = f(0)$, la función no es continua en $x = 0$.

Por tanto,

f es continua en $\mathbb{R} \setminus \bigcup_k \{k\pi\}$

Note: La discontinuidad en $x = 0$ es evitable.
 $k\pi, k \neq 0$, es esencial.
 (de salto infinito).

$$b) f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \frac{1 + e^{1/x}}{1 - e^{1/x}} & x \neq 0. \end{cases}$$

Posibles puntos de discontinuidad:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x / 1 - e^{1/x} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{No tiene solución: } e^{1/x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \text{No}.$$

Estudiamos $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + e^{1/x}}{1 - e^{1/x}} = \left(\frac{\infty}{-\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x} + 1}{e^{-1/x} - 1} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + e^{1/x}}{1 - e^{1/x}} = 1$$

Como no existe el límite, f es discontinua en $x=0$.

Esto es, f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

↑ discontinuidad
de salto con salto 2.

$$\Rightarrow f(x) = |x| e^{-|x-1|}$$

Posibles pts de discontinuidad: $x=0$, $x=1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{pues} \left| e^{-|x-1|} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ y} \right. \\ \left. \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. \right. \\ \bullet f(0) = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, f es continua en $x=0$.

Ahora,

$$\bullet f(1) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ luego } f \text{ continua en } \mathbb{R}.$$

15.

a) En clase.

b) $e^x + \sin(x) = 0$

Sea $f(x) = e^x + \sin(x)$, continua en $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2} - 1 < 0 \\ f \text{ continua en } [-\frac{\pi}{2}, 0] \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \mid f(x_0) = 0.$$

c) $\arctan(x) + e^x = 14$

$f(x) = \arctan(x) + e^x - 14$ continua en $\mathbb{R}$.

Sabemos que $\text{Im}(e^x) = (0, +\infty)$ y
 $\text{Im}(\arctan(x)) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

ambas estrictamente crecientes en $\mathbb{R}$.

En particular,

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -13 < 0 \\ f(4) = \arctan(4) + e^4 - 14 > e^4 - 14 > 2^4 - 14 > 2 > 0 \\ f \text{ continua en } [0, 4] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (0, 4) \mid f(x_0) = 0.$$

$$d) x^{179} + \frac{163}{1+x^2+\sin^2(x)} = 119.$$

$$\text{Sea } f(x) = x^{179} + \frac{163}{1+x^2+\sin^2(x)} - 119.$$

• f continua en $\mathbb{R}$.

• $f(0) = 163 - 119 > 0.$

• $f(-2) = -2^{179} + \frac{163}{1+4+\sin^2(2)} - 119 <$

$$< -2^{10} + 163 - 119 = -1024 + 163 - 119 < 0$$

• f contia en $[-2, 0]$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (-2, 0) / f(x_0) = 0.$$

Nota: No necesitamos números explícitos tipo 2, 5, ...
Podemos en algunos casos (como en d)) hacer
como en el Ej. de clase trabajando con límites.

$$\boxed{16.} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) = x + \frac{1}{x} \\ f(1) = 2 \\ f(-1) = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1) \text{ ¿ } \exists x \in [1, 1] / f(x) = 0? \\ 2) \text{ ¿ Contradice Bolzano?} \end{array}$$

Sol: 1) $f(x) = x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{no}$

No existe $x \in [-1, 1] / f(x) = 0$.

2) No, f no es continua en $x_0 = 0 \in [-1, 1]$.

25.

a) $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2 + 5x$ continuas en $\mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 5x) = 1 - (x^2 + 5x) = 1 - x^2 - 5x,$$

$$(g \circ f)(x) = g(1 - x) = (1 - x)^2 + 5(1 - x),$$

continuas en $\mathbb{R}$.

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} |x - \frac{1}{2}| & x \in [0, 1] \\ 3 & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

f continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

g continua en $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 1 & g(x) > 0, \\ 0 & g(x) \leq 0. \end{cases}$$

Como $g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$, tenemos

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & x \neq \frac{1}{2} \\ 0 & x = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ continua en } \mathbb{R} \setminus \{1/2\}.$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} |f(x) - \frac{1}{2}| & \text{si } f(x) \in [0, 1], \\ 3 & \text{si } f(x) \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Como $f(x) \in \{0, 1\} \subset [0, 1] \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x) = |f(x) - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}, \text{ continua en } \mathbb{R}.$$

26.

1) $f(x) = [x]$ continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

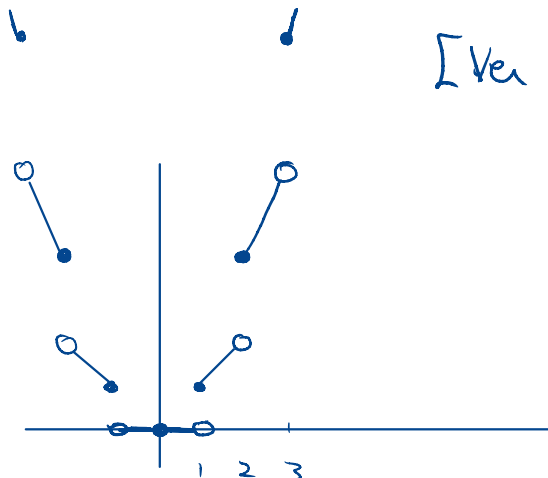
↳ Continua por la derecha en $\mathbb{R}$.

2) $g(x) = x[x]$ continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

↳ Para $n \in \mathbb{Z}$, $g(x) = nx$ con $n \leq x < n+1$

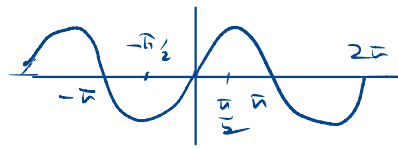
Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow (n+1)^-} g(x) = n(n+1) \quad \left. \begin{array}{l} g(n+1) = (n+1)^2 \\ \text{salto en } x = n+1 \text{ de} \\ \text{valor } n+1. \end{array} \right\}$$



[Ver $x^* \text{integer part}(x)$ en wdfrem].

3) $h(x) = [\sin(x)]$



$\sin(x) = 1$ em $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\sin(x) \in [0, 1)$ em $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left([2k\pi, 2k\pi + \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\} \right)$

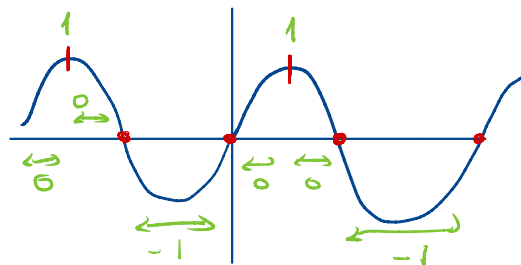
$\sin(x) \in [-1, 0)$ em $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$

Por ± 1 ,

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{em } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ 0 & \text{em } \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left([2k\pi, 2(k+1)\pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\} \right), \\ -1 & \text{em } \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2(k+1)\pi, 2\pi(k+1)). \end{cases}$$

h es discontinua em

$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\pi \right\}.$



27.

a) $f(x) = x^{2^x} - 1$

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 2 - 1 = 1 > 0 \rightarrow \exists x_0 \in (0, 1) / f(x_0) = 0 //$

f contnua em $[0, 1]$

b) Igual.

c) Sea $f(x) = x \sin(x) - \frac{\pi}{4}$, $[0, \pi]$.

$$f(0) = -\frac{\pi}{4} < 0, \quad f(\pi) = -\frac{\pi}{4} < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} > 0.$$

f continua en $[0, \pi]$

$$\rightarrow \exists x_1 \in (0, \frac{\pi}{2}) / f(x_1) = 0.$$

$$\exists x_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi) / f(x_2) = 0.$$

28. Igual.

29. $F: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua $\stackrel{?}{\Rightarrow} \exists x_0 \in [0, 1] / F(x_0) = x_0$.

Nota:

Este resultado es el conocido como Teorema de Punto Fijo de Brouwer en el caso de funciones de una variable.

Dem: Sea $g(x) = F(x) - x$.

1) Si $F(0) = 0$ o $F(1) = 1$, ya tendríamos un punto fijo.

2) Venos pues el caso cuando $F(0) \neq 0$, $F(1) \neq 1$.

Como $F: [0,1] \rightarrow [0,1]$, si $F(0) \neq 0 \Rightarrow F(0) > 0$,
 $F(1) \neq 1 \Rightarrow F(1) < 1$.

Entonces,

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = F(0) > 0 \\ g(1) = F(1) - 1 < 0 \\ g \text{ continua en } [0,1] \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (0,1) / g(x_0) = 0.$$

Esto es, $\exists x_0 \in (0,1) / F(x_0) = x_0$.

Junt con el caso 1), esto prueba que $\exists x_0 \in [0,1] /$
 $F(x_0) = x_0$.

30. ¿ $\exists x \in (0, +\infty) / \cos(x) = \frac{x}{1 + \log^2(1+x)}$?

Sol:

Sea $f(x) = \cos(x) - \frac{x}{1 + \log^2(1+x)}$.

f continua en $[0, +\infty)$,

$f(0) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + \log^2(1+x)} = +\infty$, luego dado $M \geq 2$,

$\exists k > 0 /$ si $x \geq k$, $\frac{x}{1 + \log^2(1+x)} \geq M$.

Tenemos entonces que

$$f(k) = \cos(k) - \frac{k}{1 + \log^2(1+k)} \leq 1 - M \leq -1 < 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Luego } f \text{ continua } [0, k] \\ f(0) > 0 \\ f(k) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (0, k) \subset (0, \infty) / f(x_0) = 0.$$

Nota: Podemos por ej. tomar $k = e^{10} - 1$:

$$f(k) = \cos(e^{10} - 1) - \frac{e^{10} - 1}{1 + \log^2(e^{10})} =$$

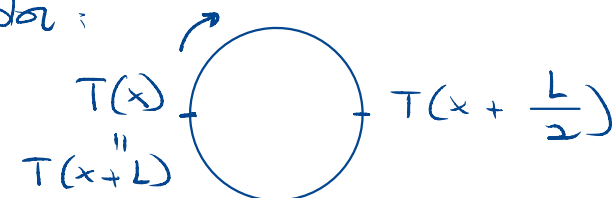
$$= \cos(e^{10} - 1) - \frac{e^{10} - 1}{1 + 100} <$$

$$< 1 - \frac{1023}{101} < 0.$$



31. Igual

32. La función que da la temperatura en cada punto del ecuador ha de ser periódica, con periodo la longitud del ecuador:



$$\left. \begin{array}{l} T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto T(x) \end{array} \right\} \text{ con } T(x) = T(x+L),$$

$L \equiv \text{longitud cuerda.}$

Asumimos que T es continua.

Definimos $g(x) = T(x) - T(x + \frac{L}{2})$.

Queremos probar que $\exists x \in [0, L] / g(x) = 0$.

Vemos que:

$$g(0) = T(0) - T\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{L}{2}\right) = T\left(\frac{L}{2}\right) - T(L) = T\left(\frac{L}{2}\right) - T(0).$$

Si $T(0) = T\left(\frac{L}{2}\right)$, ya tenemos el prob.

Si no, tenemos que

$$g(0) \cdot g\left(\frac{L}{2}\right) = -\left(T(0) - T\left(\frac{L}{2}\right)\right)^2 < 0 \quad \left(\Rightarrow \right.$$

$T \text{ continua en } \left[0, \frac{L}{2}\right]$

$$\Rightarrow \exists x \in \left(0, \frac{L}{2}\right) / T(x) = T\left(x + \frac{L}{2}\right) //$$

33. f continua en I interval, $x_1, \dots, x_n \in I$.

$$1) \nexists c \in I / f(c) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} >$$

$$\text{Sea } z \in \{x_1, \dots, x_n\} / f(z) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} f(x_i),$$

$$w \in \{x_1, \dots, x_n\} / f(w) = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} f(x_i).$$

$$\text{Entonces, } \left. \begin{aligned} \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} &\geq \frac{n f(w)}{n} = f(w), \\ \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} &\leq \frac{n f(z)}{n} = f(z). \end{aligned} \right\} (*)$$

Caso 1: $f(x_1) = \dots = f(x_n)$.

Entonces trivial, pues $\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} = f(x_i) \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Caso 2: $\exists i \neq j \in \{1, \dots, n\} / f(x_i) < f(x_j)$.

Entonces, las desigualdades (*) son estrictas y $z \neq w$.

$$\text{Definimos } g(x) = f(x) - \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

$$\text{Tenemos } g(z) > 0$$

$$g(w) < 0.$$

Como g continua en I ,

concluimos que:

si $z < w$, $\exists x_0 \in (z, w) \subset I / g(x_0) = 0$,

si $w < z$, $\exists x_0 \in (w, z) \subset I / g(x_0) = 0 //$.

2) Sea t el tiempo medido en minutos.

Definimos $d(t)$ como la distancia recorrida entre los instantes $t-1$ y t , que es una función continua de t (*).

Tenemos que:

$$d(1) + d(2) + \dots + d(50) = 100$$

$$\text{¿ } \exists t \in [1, 50] / d(t) = 2 ?$$

Si, por 1) sabemos que existe $t \in [1, 50] /$

$$d(t) = \frac{d(1) + \dots + d(50)}{50} = \frac{100}{50} = 2 //$$

(*) $d(t)$ viene dada por la integral de la velocidad:

$$d(t) = \int_{t-1}^t v(s) ds. \text{ Si la velocidad es continua, entonces su integral también.}$$