Nombre y apellidos ____

Análisis Matemático I (AM-I) - Grupo 1 - Prueba Parcial 1

Lunes 6 de noviembre de 2023, 9:00 - 11:00

Firma: ______________________________

- **No escribir en el reverso de ninguna de las hojas. Usar solo las hojas proporcionas**. El uso de calculadoras, ordenadores y smartphones no es necesario y no está permitido. Toda respuesta debe estar justificada adecuadamente para recibir puntuación completa. Señalar claramente las respuestas y los pasos dados para obtenerlas: soluciones ilegibles no se corregirán. Escribir en color azul, negro o gris (bolígrafo o lápiz).

No escribir aquí

Problema	Puntos	Puntuación
1	30	
2	20	
3	20	
4	20	
5	10	
Total	100	
Extra	10	

Problema 1 [30 puntos]

Sea $f(x) = 1 - x + x\ln(x) - x\ln^2(x)$ en $x \in (0,1]$

Parte a. Definir $f(0)$ para que f sea continua en $[0,1]$.

Parte b. Con el valor de $f(0)$ del apartado a), estudiar la derivabilidad de f en $[0,1]$, calculando la derivada en los puntos donde exista (estudiar las derivadas laterales en los extremos del intervalo).

Parte c. Estudiar el crecimiento y la convexidad de f en $(0, 1)$, y sus extremos absolutos y relativos en $[0, 1]$.

Parte d. Representar gráficamente $f(x)$, y determinar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la ecuación $f(x) = \alpha$ tiene exactamente dos soluciones en $[0, 1]$.

Problema 2 [20 puntos]

Demostrar los siguientes apartados, usando apropiadamente los teoremas oportunos:

Parte a. [10 puntos] La ecuación $x^2 = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ tiene al menos una solución en $(0, +\infty)$.

Parte b. [10 puntos] La ecuación $x^2 = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ tiene una única solución en $(0, +\infty)$.

Problema 3 [20 puntos]

Considerar la función $y = y(x)$ que cumple $y(1) = 0$ y que está definida implícitamente por la ecuación

$$\arctan(xy) + x^2 - y^2 = 1.$$

Parte a. [10 puntos] Calcular $y'(1)$.

Parte b. [10 puntos] Usando el método que se considere oportuno, calcular el límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{y(x)}{x - 1}.$$

Problema 4 [20 puntos]

Parte a. [10 puntos] Dado $p \in \mathbb{Z}$, considerar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^p}$$

Parte a.1. Calcular el valor del límite para $p = 2$.

Parte a.2. Calcular el valor del límite en función del parámetro $p \in \mathbb{Z}$.

Parte b. [10 puntos]

Parte b.1. Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 en $x = 0$ de $f(x) = \sqrt{1+x}$. Deducir el desarrollo de orden 3 en $x = 0$ de $g(x) = \sqrt{1+\sin x}$.

Parte b.2. Mostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x^3} = +\infty$.

Problema 5 [10 puntos]

Demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Problema Opcional [10 puntos Extra]

Sea $a \leq b \leq c$. Demostrar que, si f es continua en el intervalo $[a, c]$, derivable en (a, c) y f' es creciente en (a, c) y, entonces

$$(b - a)f(c) + (c - b)f(a) \geq (c - a)f(b).$$

Espacio Extra:

Espacio Extra: