

Nombre y apellidos _____

Análisis Matemático I (AM-I) - Grupo 1 - Prueba Parcial 1

Martes 14 de noviembre de 2023, 16:00 - 18:00

Firma: _____

- **No escribir en el reverso de ninguna de las hojas. Usar solo las hojas proporcionas.** El uso de calculadoras, ordenadores y smartphones no es necesario y no está permitido. Toda respuesta debe estar justificada adecuadamente para recibir puntuación completa. Señalar claramente las respuestas y los pasos dados para obtenerlas: soluciones ilegibles no se corregirán. Escribir en color azul, negro o gris (bolígrafo o lápiz).

No escribir aquí

Problema	Puntos	Puntuación
1	30	
2	20	
3	20	
4	20	
5	10	
Total	100	
Extra	10	

Problema 1 [30 puntos]

Parte a. Prueba que existe un único $x_0 > 0$ solución de la ecuación $x^3 \log x = 1$.
¿Es $x_0 > e$? Razona la respuesta.

Parte b. Sea $f(x) = 1 - x^3 \log x$. Define $f(0)$ para que f extendida sea continua en el origen. Teniendo en cuenta dicha definición, determina el dominio de f extendida.

Parte c. Estudia la derivabilidad de f extendida.

Parte d. Calcula los intervalos de crecimiento y convexidad de f , así como sus extremos relativos y absolutos. Representa f gráficamente y determina los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha$ tenga exactamente una solución.

Problema 2 [20 puntos]

Indica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justificando la respuesta en cualquier caso:

Parte a. [10 puntos] La ecuación $x^2 = x \sin x + \cos x$ tiene una única solución en \mathbb{R} .

Parte b. [10 puntos] La imagen de la función $f(x) = e^{-x^2}(x^2 - 3)$ es el intervalo $[-3, e^{-4}]$.

Problema 3 [20 puntos]

Considera la función $y = y(x)$ que cumple $y(-2) = \sqrt{3}$ y que está definida implícitamente por la ecuación

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Parte a. [10 puntos] Calcular $y'(-2)$.

Parte b. [10 puntos] Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 en $x = -2$ de $y(x)$.

Problema 4 [20 puntos]

Parte a. [10 puntos] Calcula según los valores de $a \in \mathbb{R}$ el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + x^2)e^{-ax^2}}{(\cos(ax))^2 - \sqrt{1 - x^2} + \frac{x^2}{2}}.$$

Parte b. [10 puntos] Calcula el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \log(1 + \sin(2x)) - 2 \arctan(x^3)}{(e^x - 1)^3 - \sin^3(x)}.$$

Problema 5 [10 puntos]

Demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $2^{2n} + 5$ es múltiplo de 3. A continuación, demostrar que $2^{2n} + 15n - 1$ es múltiplo de 9.

Problema Opcional [10 puntos Extra]

El teorema de Borsuk-Ulam afirma que cualquier función continua de una esfera \mathbb{S}^2 en el plano \mathbb{R}^2 hace corresponder algún par de puntos opuestos en la esfera al mismo punto del plano.

Demostrar el teorema en una variable. Esto es, si denotamos \mathbb{S} a la circunferencia unidad, se tiene que: Si $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces existe $x \in \mathbb{S}$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Espacio Extra:

Espacio Extra: