Nombre y apellidos ____

Análisis Matemático I (AM-I) - Grupo 1 - Prueba Parcial 1

Lunes 6 de noviembre de 2023, 9:00 - 11:00

Firma: ________________________________

- **No escribir en el reverso de ninguna de las hojas. Usar solo las hojas proporcionas**. El uso de calculadoras, ordenadores y smartphones no es necesario y no está permitido. Toda respuesta debe estar justificada adecuadamente para recibir puntuación completa. Señalar claramente las respuestas y los pasos dados para obtenerlas: soluciones ilegibles no se corregirán. Escribir en color azul, negro o gris (bolígrafo o lápiz).

No escribir aquí

Problema	Puntos	Puntuación
1	30	
2	20	
3	20	
4	20	
5	10	
Total	100	
Extra	10	

Problema 1 [30 puntos]

Sea $f(x) = 1 - x + x\ln(x) - x\ln^2(x)$ en $x \in (0,1]$

Parte a. Definir $f(0)$ para que f sea continua en $[0,1]$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(1 - x + x\cdot\ln(x) - x\ln^2(x)\right) =$$

$$= 1 - \lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) - \lim_{x\to 0^+} x\ln^2(x) \underset{\text{L'Hôp.}}{=} 1 \Longrightarrow$$

Defino $f(0) = 1$.

Parte b. Con el valor de $f(0)$ del apartado a), estudiar la derivabilidad de f en $[0,1]$, calculando la derivada en los puntos donde exista (estudiar las derivadas laterales en los extremos del intervalo).

f derivable en $(0,1)$ pues $\ln(x)$ lo es:

$$f'(x) = \cancel{-1} + \ln(x) + \cancel{\frac{x}{x}} - \ln^2(x) - 2x\ln(x)\frac{1}{x} =$$

$$= -\ln(x) - \ln^2(x) = -\ln(x)\left(1 + \ln(x)\right),\ x \in (0,1).$$

- En $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{1} - x + x\cdot\ln(x) - x\cdot\ln^2(x) - \cancel{1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-1 + \ln(x) - \ln^2(x)\right) = -\infty \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ No es derivable en $x = 0$

• En $x = 1$: $f(1) = 0$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x+x\ln(x)(1-\ln(x))}{x-1} =$$

$$= -1 + \lim_{x\to 1^-} \frac{x\ln(x)}{x-1} = -1 + \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1+x-1)}{x-1} = 0.$$

$\Rightarrow$ Derivable por la derecha en $x = 1$.

Parte c. Estudiar el crecimiento y la convexidad de f en $(0, 1)$, y sus extremos absolutos y relativos en $[0, 1]$.

• $f'(x) = -\ln(x)(1+\ln(x))$

$\ln(x) < 0$ para todo $x \in (0,1)$

$1 + \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x \in (e^{-1}, 1)$

Por tanto, f creciente en $x \in (e^{-1}, 1)$, decrec en $(0, e^{-1})$

• $f''(x) = -\dfrac{1+\ln(x)}{x} - \ln(x)\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1+2\ln(x)}{x} > 0 \Leftrightarrow$ $(x \in (0,1))$

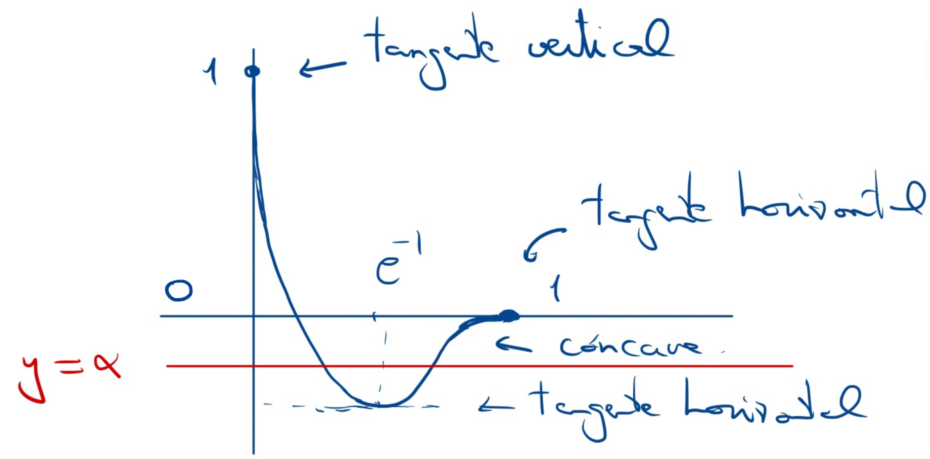
$\Leftrightarrow 1 + 2\ln(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x \in (0, e^{-1/2})$

Así, f convexa en $(0, e^{-1/2})$, cóncava en $(e^{-1/2}, 1)$.

• $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(e^{-1}) = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 1 - \frac{3}{e} < 0$.

Luego mínimo relativo y absoluto en $x = e^{-1}$, máximo absoluto en $x = 0$.

Parte d. Representar gráficamente $f(x)$, y determinar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la ecuación $f(x) = \alpha$ tiene exactamente dos soluciones en $[0, 1]$.



Para $\alpha \in (f(e^{-1}), 0]$ la ecuación $f(x) = \alpha$ tiene exact. dos soluciones.

$f(1) = 0$

Problema 2 [20 puntos]

Demostrar los siguientes apartados, usando apropiadamente los teoremas oportunos:

Parte a. [10 puntos] La ecuación $x^2 = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ tiene al menos una solución en $(0, +\infty)$.

Sea $g(x) = x^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \ln(x)$

$$\left.\begin{aligned} &g(1) = 1 > 0 \\ &g(e^{-1}) = \frac{1}{e^2} - 1 < 0 \\ &g \text{ continua en } [e^{-1}, 1] \end{aligned}\right\} \xrightarrow{T^{\underline{ma}}\ \text{Bolzano}} \exists c \in (e^{-1}, 1) \,/\, g(c) = 0.$$

Parte b. [10 puntos] La ecuación $x^2 = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ tiene una única solución en $(0, +\infty)$.

g derivable en $(0, +\infty)$,

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Supongamos $\exists\, x_1 \neq x_2 \in (0, \infty) \,/\, g(x_1) = g(x_2) = 0.$

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} &g \text{ continua en } [x_1, x_2] \\ &g \text{ derivable en } (x_1, x_2) \\ &g(x_1) = g(x_2) \end{aligned}\right\} \underset{T^{\underline{a}}\ \text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists c \in (x_1, x_2) \,/\, g'(c) = 0 \rightarrow\!\leftarrow.$$

Problema 3 [20 puntos]

Considerar la función $y = y(x)$ que cumple $y(1) = 0$ y que está definida implícitamente por la ecuación

$$\arctan(xy) + x^2 - y^2 = 1.$$

Parte a. [10 puntos] Calcular $y'(1)$.

$$\arctan(x\,y(x)) + x^2 - (y(x))^2 = 1 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y(x) + x\,y'(x)}{1 + x^2 (y(x))^2} + 2x - 2y(x)\,y'(x) = 0.$$

En $x = 1$, $y(1) = 0$: $y'(1) + 2 = 0 \Rightarrow y'(1) = -2$.

Parte b. [10 puntos] Usando el método que se considere oportuno, calcular el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x)}{x-1}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x)}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{y'(x)}{1} = y'(1) = -2$$

Problema 4 [20 puntos]

Parte a. [10 puntos] Dado $p \in \mathbb{Z}$, considerar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^p}$$

Parte a.1. Calcular el valor del límite para $p = 2$.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{6} + o(x^2)\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{pues } \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1.$$

Parte a.2. Calcular el valor del límite en función del parámetro $p \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^p} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^p} \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^{3-p}}{6} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 3 \\ \nexists & \text{si } p \geq 3 \end{cases}$$

Parte b. [10 puntos]

Parte b.1. Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 en $x = 0$ de $f(x) = \sqrt{1+x}$. Deducir el desarrollo de orden 3 en $x = 0$ de $g(x) = \sqrt{1+\sin x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = \frac{-1}{4}(1+x)^{-3/2}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3}{8\cdot 3!}x^3 + o(x^3)$$

$$g(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\sin^2(x)}{8} + \frac{\sin^3(x)}{16} + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3).$$

Parte b.2. Mostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x^3} = +\infty$.

- Como $-\sin(x) = \sin(-x)$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)} - \sqrt{1+\sin(-x)}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \frac{x}{2} - \cancel{\frac{x^2}{8}} - \frac{x^3}{48} - \left(\cancel{1} - \frac{x}{2} - \cancel{\frac{x^2}{8}} + \frac{x^3}{48}\right) + o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3} = +\infty.$$

Problema 5 [10 puntos]

Demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

- $\underline{n=1}$: $1^2 = \frac{1 \cdot 3}{3}$ ✓

- Si $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, ¿se cumple que $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}$?

Veamos:

$$1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} + (2n+1)^2 =$$

$$= \frac{4n^3-n}{3} + 4n^2 + 4n + 1 = \frac{1}{3}\left(4n^3 + 12n^2 + 11n + 3\right).$$

Concluimos la prueba pues

$$\frac{(n+1)}{3}\left(4(n+1)^2-1\right) = \frac{n+1}{3}\left(4n^2+8n+3\right) = \frac{1}{3}\left(4n^3+12n^2+11n+3\right) //.$$

Problema Opcional [10 puntos Extra]

Sea $a \leq b \leq c$. Demostrar que, si f es continua en el intervalo $[a, c]$, derivable en (a, c) y f' es creciente en (a, c) y, entonces

$$(b-a)f(c) + (c-b)f(a) \geq (c-a)f(b).$$

TVM en (a,b): $\exists c_1 \in (a,b) /$

$$f'(c_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

En (b,c): $\exists c_2 \in (b,c) /$

$$f'(c_2) = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Como f' creciente en (a,c) y $c_1 \leq c_2$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(b)(c-b) - f(a)(c-b) \leq f(c)(b-a) - f(b)(b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(b)(c-\cancel{b}+\cancel{b}-a) \leq f(c)(b-a) + f(a)(c-b)$$

Espacio Extra:

Espacio Extra: