

### Clase 34: Primitivas

• Def: Dada  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , una primitiva de  $f$  es cualquier función  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivable tal que  $\forall x \in I$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

• Nota: Si  $F(x)$  es primitiva de  $f(x)$ , entonces todas las primitivas de  $f(x)$  son de la forma  $F(x) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

• Def: Se llama integral indefinida de  $f$  al conjunto de todas sus primitivas, y se denota como  $\int f(x) dx$ .

→ Propiedades:

operación "inversa" de la derivada.

$$1) \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x), \quad \int f'(x) dx = f(x) + C.$$

2) Operación lineal:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

## 1. Integrales inmediatas

$$\bullet \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\bullet \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C \quad \left[ \begin{array}{l} x > 0: \frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x}, \\ x < 0: \frac{d}{dx} \log(-x) = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x} \end{array} \right]$$

$$\bullet \int e^x dx = e^x + C$$

$$\bullet \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C, \quad \int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\bullet \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C,$$

$$\bullet \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cotan(x) + C$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \frac{1}{\tan(x)} = \\ = \frac{-1}{\tan^2(x)} \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)} \end{array} \right]$$

$$\bullet \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

$$\bullet \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C.$$

## 2. Métodos generales de integración

### 2.1) Integración por sustitución.

Consiste en aplicar un cambio de variable mediante el uso de la regla de la cadena.

Sea  $F(x)$  primitiva de  $f(x)$ . Entonces,

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

→ Por cambio de variable:

$$\begin{aligned} \int f(g(x)) g'(x) dx &= \int f(t) dt = F(t) + C = \\ &\quad \uparrow \\ &\quad t = g(x) \\ &\quad dt = g'(x) dx \\ &= F(g(x)) + C. \end{aligned}$$

• Ejercicios:

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{\log^3(x)}{x} dx &= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\log^4(x)}{4} + C. \\ &\quad \uparrow \\ &\quad t = \log(x), dt = \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx = \frac{1}{2} \tan(x^2) + C$$

$$\left. \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} \rightarrow \int \frac{1/2}{\cos^2(t)} dt$$

$$3) \int \cos^2(x) dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

## 2.2. Integración por partes

Usando la regla del producto para la derivada:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x)v(x) = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx$$

Así,

$$\boxed{\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)}$$

$$(du(x) = u'(x)dx, dv(x) = v'(x)dx)$$

→ "Regla ALPES": Arco, Logaritmo, Potencias, Exponencial, Seno/cos.



• Ejemplo: 1)  $\int \log(x) dx = x \cdot \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow$

$$u(x) = \log(x) \rightarrow du(x) = \frac{dx}{x}$$

$$dv(x) = dx \rightarrow v(x) = x$$

$$\Rightarrow \int \log(x) dx = x \log(x) - x + C = x(\log(x) - 1) + C.$$

2)  $\int e^x \sin(x) dx = \dots$  cíclica (hacer).

3)  $\int x^3 e^{x^2} dx$

$$u(x) = x^2 \rightarrow du(x) = 2x dx$$

$$dv(x) = x e^{x^2} dx \rightarrow v(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} \int \Rightarrow$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C = e^{x^2} \frac{x^2 - 1}{2} + C.$$

### 3. Métodos particulares

#### 3.1. Integración de funciones racionales.

Sean  $P(x)$ ,  $Q(x)$  polinomios, ¿ $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ ?

1) Si  $\text{grado de } P > \text{grado de } Q$ , se hace la división,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{C(x)}_{\text{polinomio}} + \underbrace{\frac{R(x)}{Q(x)}}_{\text{racional, con grado } R < \text{grado } Q}.$$

2) Si  $\text{grado de } P < \text{grado de } Q$ :

→ Se calculan las raíces de  $Q(x)$ .

→ Se descompone  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  en fracciones del tipo:

• Por cada raíz real  $\alpha$  simple de  $Q$ , una fracción tipo

$$\frac{A}{x - \alpha} \quad (A \in \mathbb{R} \text{ por determinar})$$

• Por cada raíz real  $a$  de  $Q$  con multiplicidad  $m$ ,  $m$  fracciones del tipo

$$\frac{A_1}{x - a}, \frac{A_2}{(x - a)^2}, \dots, \frac{A_m}{(x - a)^m} \quad \left( A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R} \text{ por determinar} \right)$$

• Por cada par de raíces complejas conjugadas simples de  $Q$ , una fracción del tipo

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} \quad (M, N \in \mathbb{C} \text{ por determinar})$$

donde  $ax^2+bx+c$  es el polinomio con raíces complejas conjugadas.

- [Caso de raíces complejas conjugadas con multiplicidad  $m$  en apuntes].

Tendremos entonces  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  expresado como suma

de fracciones de los tipos anteriores, con las constantes  $(A, M, N, \dots)$  determinadas. Finalmente, cada fracción se integra:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a|, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^m} = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} \quad (m \neq 1)$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2 + \beta^2} dx = \int \frac{M(x-a) + M\alpha + N}{(x-a)^2 + \beta^2} dx =$$

$$= \frac{M}{2} \log((x-a)^2 + \beta^2) + \frac{M\alpha + N}{\beta} \arctan\left(\frac{x-a}{\beta}\right) + C.$$

## Clase 35: Integrales trigonométricas

### • Ejemplo:

$$1) \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$$

$$Q(x) = x^2 - 3x + 2, \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(x) = (x-2)(x-1)$$

Descomponemos:

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x-2)}{(x-2)(x-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = A(x-1) + B(x-2)$$

Opción 1:

$$x=1 \rightarrow 1 = -B \Rightarrow A=2, B=-1.$$

$$x=2 \rightarrow 2 = A$$

Opción 2:  $x = A(x-1) + B(x-2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(1-A-B) + A + 2B = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 1-A-B=0 \\ A+2B=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ B=-1 \end{array}$$

Finalmente,

$$\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{2}{x-2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx =$$
$$= 2 \log|x-2| - \log|x-1| + C$$

$$2) \int \frac{x}{x^2 + 4x + 8} dx$$

$$Q(x) = x^2 + 4x + 8, \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} \in \mathbb{C}.$$

Raíces complejas conjugadas simples.

Completamos cuadrados en el denominador:

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 4x + 4 + 4 = (x+2)^2 + 4 \Rightarrow$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 4x + 8} dx = \int \frac{x+2-2}{(x+2)^2 + 4} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \log((x+2)^2 + 4) - \arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + C.$$

Nota: Completar cuadrados  $ax^2 + bx + c$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] =$$

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right).$$

### 3.2. | Integrales reducibles a racionales

#### 3.2.1 | Integrales trigonométricas

Integrales de la forma  $\int R(\sin(x), \cos(x)) dx$ ,  
 con  $R(\sin(x), \cos(x))$  una función racional en  
 $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ .

Ej:  $\int \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\sin^2(x)} dx$

- Necesitamos recordar fórmulas trigonométricas:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{aligned} \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

- Método general: Se hace el cambio  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Necesitaremos expresar  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $dx$  en función de  $t$ :

$$dt = \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \frac{1}{2} dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

$$\cos(x) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 2 \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\int R(\sin(x), \cos(x)) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

$\nearrow$   
 $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

• Casos particulares más sencillos:

1)  $R$  es impar en  $\sin(x)$ .

Esto es,  $R(-\sin(x), \cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x))$ .

$$\text{Ej: } \int \frac{\sin(x) \cos(x)}{1 - \cos(x)} dx$$

Se hace el cambio  $t = \cos(x) \rightarrow \sin^2(x) = 1 - t^2$   
 $dt = -\sin(x) dx$ .

2)  $R$  es impar en  $\cos(x)$

Cambio  $t = \sin(x) \rightarrow \cos^2(x) = 1 - t^2$   
 $dt = \cos(x) dx$ .

3)  $R$  es par en  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ :

$R(-\sin(x), -\cos(x)) = R(\sin(x), \cos(x))$ .

$$\text{Ej: } \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x) + \sin(x) \cos(x)} dx$$

Cambio:  $t = \tan(x)$



$$dt = (1 + \tan^2(x)) dx \rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2} \rightarrow \sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$$

• Ejercicios: Problemas 4 y 9

4 a)  $\int \frac{\sin^4(x)}{\cos^2(x)} dx$       b)  $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$

c)  $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)(1+\cos^2(x))} dx$       d)  $\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)} dx$

e)  $\int \frac{\cos(x)}{\sin^3(x) + 2\cos^2(x)\sin(x)} dx$       f)  $\int \frac{1}{1+\cos(x)} dx$

a) Par en  $\sin, \cos$

b) Impar en  $\sin$

c) Impar en  $\sin$ ;  
impar en  $\cos$ .  
Par en  $\sin$  y  $\cos$ .

d) Impar en  $\sin$

e) Impar en  $\cos$ ; impar en  $\sin$ ;  
par en  $\sin$  y  $\cos$ .

f) General.

## Clase 36: Integrales irracionales

$$b) \int \frac{1}{\sin(x)} dx, \quad t = \cos(x), \quad dt = -\sin(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)} dx = \int \frac{-dt}{1 - t^2} =$$

$$= \int \frac{A}{1+t} dt + \int \frac{B}{1-t} dt,$$

$$-1 = A(1-t) + B(1+t) \Rightarrow B = -\frac{1}{2}, \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = -\frac{1}{2} \log |1+t| + \frac{1}{2} \log |1-t| =$$

$$= \log \left| \frac{1-t}{1+t} \right| = \log \left| \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right|.$$

$$p) \int \frac{dx}{1 + \cos(x)}, \quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$dt = \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \frac{1}{2} dx \rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Por  $tdo$ ,

$$\int \frac{dx}{1+\cos(x)} = \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{1+t^2+1-t^2} = \int dt = t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

### 3.2.2 Integrales con raíces de polinomios de 1<sup>er</sup> grado

Ejemplo:  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad \uparrow \quad \int \frac{2t dt}{1+t} =$

$$\sqrt{x} = t$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$$

$$= \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = 2t - 2 \log|1+t| =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2 \log(1+\sqrt{x}).$$

• Caso general:  $\int R(x, g(x)^{p_1}, \dots, g(x)^{p_k}) dx$

$\uparrow$  racional  $\uparrow$

$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$   
 $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Q}.$

Se hace el siguiente cambio:

$$t = (g(x))^{\frac{1}{N}} \quad \text{con } N = \text{mín. común múltiplo de los denominadores de } p_1, \dots, p_k.$$

↳ de esta forma se eliminan todas las raíces:

$$g(x) = t^N \Rightarrow g(x)^{p_i} = t^{N \cdot p_i} \leftarrow \text{se cancela el denominador.}$$

¿ $x, dx$  en función de  $t$ ?

$$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = t^N \Leftrightarrow ax+b = t^N(cx+d) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(a - ct^N) = d \cdot t^N - b \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{d \cdot t^N - b}{a - c \cdot t^N}$$

$$\text{Ej: } \int \frac{x}{(x+2)^{2/3} - (x+2)^{1/2}} dx = I,$$

$$N = \text{m.c.m.}(3, 2) = 6 \Rightarrow t = (x+2)^{\frac{1}{6}} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow (x+2) &= t^6 \Rightarrow x = t^6 - 2, \quad dx = 6t^5 dt \\ (x+2)^{\frac{2}{3}} &= t^{6 \cdot \frac{2}{3}} = t^4 \\ (x+2)^{\frac{1}{2}} &= t^{6 \cdot \frac{1}{2}} = t^3 \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int \frac{(t^6 - 2)}{t^4 - t^3} 6t^5 dt = \int \frac{6(t^6 - 2)t^5}{t - 1} dt = \dots$$

↑  
racional

[dividir polinomios, fracciones simples,  
integral, destacar  $t = (x+2)^{1/6}$ ]

### 3.2.3 Integrales con raíces de polinomios cuadráticos.

Tipo  $\int R(x, \sqrt{\alpha + \beta x^2}) dx$

↑  
racional

$\underbrace{\hspace{2cm}}$   
 $\alpha, \beta \neq 0$

Distinguimos tres casos:

1)  $\alpha > 0, \beta < 0$

Es decir,  $\alpha = a^2, \beta = -b^2 \rightarrow$

Luego la raíz queda como

$$\sqrt{a^2 - b^2 x^2} = a \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}x\right)^2} \rightsquigarrow \text{la raíz desaparece}$$

si hacemos el cambio  $\left(\frac{b}{a}x\right)^2 = \sin^2 t$

Es decir,  $\int R(x, \sqrt{a^2 - b^2 x}) dx$  se convierte en una integral trigonométrica al cambiar

$$\boxed{x = \frac{a}{b} \sin t} \rightarrow \sqrt{a^2 - b^2 x} = a |\cos(t)|$$

$$dx = \frac{a}{b} \cos(t) dt.$$

Ejemplo:  $\int \frac{x}{1+x+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} dx = I.$

$$x = \frac{1}{2} \sin(t) \rightarrow I = \int \frac{\frac{1}{2} \sin(t)}{1 + \frac{1}{2} \sin(t) + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sin^2(t)}} \cdot \frac{1}{2} \cos t dt =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{4} \sin(t) \cos(t)}{1 + \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{2} |\cos(t)|} dt$$

Si  $t / \cos(t) \geq 0$ , resolvemos

$$I = \int \frac{\frac{1}{4} \sin(t) \cos(t)}{1 + \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{2} \cos(t)} dt, \text{ trigonométrica de } \begin{pmatrix} * \\ \text{pag.} \\ 215 \end{pmatrix} \text{ tipo general.}$$

Cambio  $z = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow$  Se obtiene una racional.

Nota: El resultado nos queda en  $z$ , luego deshacemos los cambios:

$$z = \tan\left(\frac{t}{2}\right), \quad x = \frac{1}{2} \sin(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \tan\left(\frac{1}{2} \arcsin(2x)\right).$$

Esto se puede expresar mejor usando las fórmulas trigonométricas:

$$\text{Dado } \sin(t) = 2x \leadsto \tan\left(\frac{t}{2}\right) ?$$

$$\begin{aligned} \sin(t) &= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \\ &= 2 \frac{\tan(t/2)}{1 + \tan^2(t/2)}. \end{aligned}$$

Por tanto, despejando,

(en  $t=0$ ,  $\tan(0)=0$ )

$$2 \tan(t/2) = \sin(t) + \sin(t) \tan^2(t/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan(t/2) = \frac{2 - \sqrt{4 - 4 \sin^2(t)}}{2 \sin(t)} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}$$

Así, deshacemos el cambio

$$z = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}.$$

• Ejercicio: (casa) Probar la identidad

$$\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \quad \text{para } x \in (-1, 1).$$

2)  $\alpha < 0, \beta > 0$

$$\text{Es decir, } \alpha = -a^2, \beta = b^2$$

$$\int R(x, \sqrt{b^2 x^2 - a^2}) dx$$

Cambio:

$$\text{Como } \sqrt{b^2 x^2 - a^2} = a \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 - 1} \quad \text{y sabemos la}$$

$$\text{identidad } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan^2(x) = \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^2 - 1,$$

hacemos el cambio

$$\boxed{\frac{bx}{a} = \frac{1}{\cos(t)}}$$

3)  $\alpha > 0, \beta > 0$

$$\alpha = a^2, \beta = b^2 \Rightarrow \int R(x, \sqrt{a^2 + b^2 x^2}) dx$$



Usamos de nuevo la identidad  $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ .

Hacemos pues el cambio  $\boxed{\frac{bx}{a} = \tan(t)}$ ,

$$\text{lo que da } \sqrt{a^2 + b^2 x^2} = a \sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}}.$$

• Nota: Cualquier integral del tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \text{ con } a \neq 0,$$

se reduce a una de las tres anteriores completando cuadrados,

$$ax^2 + bx + c = a \left( (x + \alpha)^2 + \beta \right)$$

$$a \left( \left( x - \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2} \right) \sim \begin{aligned} \alpha &= -\frac{b}{2a} \\ \beta &= c - \frac{b^2}{4a^2}. \end{aligned}$$

→ (\*)

$$I = \int \frac{\frac{1}{4} s(t) \cos(t)}{1 + \frac{1}{2} s(t) + \frac{1}{2} \cos(t)} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Cambio } z = \tan\left(\frac{t}{2}\right) &\Rightarrow dz = \left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) \frac{1}{2} dt \\ &\hookrightarrow dt = \frac{2}{1+z^2} dz, \end{aligned}$$

$$\cos(t) = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 2 \frac{z}{1+z^2}$$

Queda,

$$I = \int \frac{\frac{1}{4} 2 \frac{z}{1+z^2} \frac{1-z^2}{1+z^2}}{1 + \frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2} \frac{1-z^2}{1+z^2}} \frac{2}{1+z^2} dz =$$

$$= \int \frac{z(1-z^2)}{1+z^2 + z + \frac{1}{2}(1-z^2)} \frac{dz}{(1+z^2)^2} =$$

$$= \int \frac{z(1-z^2)}{\left(\frac{1}{2}z^2 + z + \frac{3}{2}\right)(1+z^2)^2} dz$$

Integral racional:  $1+z^2=0 \Leftrightarrow z^2=-1$

$$(1+z^2)^2$$

← raíces  
complejas

raíces  
complejas múltiples.

[Paramos aquí].

## Clase 37: Ejercicios

2 d)

$$I = \int \frac{x-2}{(x^2+x+1)(x-1)} dx = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{Mx+N}{x^2+x+1} dx,$$

$x=1$  raíz real simple  
 $x^2+x+1 \rightarrow$  raíces complejas conjugadas dadas.

$$I = A \ln|x-1| + \underbrace{\int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1} dx}_{\equiv I_1}.$$

$$I_1 = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \int \frac{Mx+N}{\frac{3}{4} \left[ \frac{4}{3} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right]} dx =$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{Mx+N}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dx.$$

Cambio  $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x+\frac{1}{2}\right) \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} y - \frac{1}{2}.$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{4}{3} \int \frac{M \left( \frac{\sqrt{3}}{2} y - \frac{1}{2} \right) + N}{y^2 + 1} \frac{\sqrt{3}}{2} dy = \\
&= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{4} M \int \frac{2y}{1+y^2} dy + \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{-\frac{\pi}{2} + N}{y^2 + 1} dy = \\
&= \frac{M}{2} \log(1+y^2) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \left( N - \frac{\pi}{2} \right) \arctan(y) = \\
&= \frac{\pi}{2} \log \left( 1 + \frac{4}{3} \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 \right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \left( N - \frac{\pi}{2} \right) \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \left( x + \frac{1}{2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Calculamos finalmente  $A, M, N$ :

$$x - 2 = A(x^2 + x + 1) + (x-1)(Mx + N) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} (x=1) &\rightarrow -1 = 3A \\ (x=0) &\rightarrow -2 = A - N \\ (x=-1) &\rightarrow -3 = A + 2M - 2N \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} A &= -1/3 \\ N &= -1/3 + 2 = \frac{5}{3} \\ M &= 1/3 \end{aligned}
\end{aligned}$$

$$\boxed{4} \text{ d) } \int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)} dx = I.$$

Imponer en  $\sin(x) \rightarrow t = \cos(x) \rightarrow \text{Racional.}$

[Paso a paso  $\rightarrow$  App Photomath]

3 b)  $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$  Cambio  $t = e^x$   
 [También: cambio  $e^x = \sin(x)$ ]

[Photomath]

8)  $\int e^x \frac{x^2+1}{(1+x)^2} dx = I$  [Photomath no la hace]

Dividimos los polinomios:

$$\frac{x^2+1}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 - 2x}{(1+x)^2} = 1 - \frac{2x}{(1+x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int \left( e^x - e^x \frac{2x}{(1+x)^2} \right) dx =$$

$$= e^x - \underbrace{\int e^x \frac{2x}{(1+x)^2} dx}_{\equiv I_1}$$

Calculamos  $I_1$ :

$$I_1 = - \int 2e^x \frac{x+1-1}{(1+x)^2} dx = -2 \int e^x \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx =$$

$$= -2 \int e^x \frac{dx}{1+x} + 2 \int e^x \frac{dx}{(1+x)^2}$$

Usamos integración por partes en la primera:

$$u = \frac{1}{1+x} \rightarrow du = \frac{-1}{(1+x)^2} dx \quad \int \rightarrow$$
$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

$$\Rightarrow \int e^x \frac{dx}{1+x} = \frac{e^x}{1+x} + \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx.$$

Por tanto,

$$I_1 = -\frac{2e^x}{1+x} - 2 \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx + 2 \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx =$$
$$= -\frac{2e^x}{1+x}.$$

$$\text{Así, } I = e^x - \frac{2e^x}{1+x} = e^x \frac{x-1}{1+x}.$$

10   $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$  [Photomath no la hace]

$$I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2 + 1\right]}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2}}$$

Cambio :

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) = \tan(t) \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan(t) - \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan(t)\right) \sqrt{1 + \tan^2(t)}} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan(t)\right) |\cos(t)|}$$

Para  $t / \cos(t) > 0$  :

$$I = 2 \int \frac{dt}{\cos(t) + \sqrt{3} \sin(t)}$$

Trigonometrice general:  $z = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ .

$$\hookrightarrow dt = \frac{2}{1+z^2} dz, \quad \cos(t) = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \sin(t) = \frac{2z}{1+z^2}.$$

$$I = 2 \int \frac{1}{\frac{1-z^2}{1+z^2} + \sqrt{3} \frac{2z}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2} dz =$$

$$= 4 \int \frac{dz}{1-z^2 + 2\sqrt{3}z} \quad \text{Racional.}$$

$$z = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12+4}}{-2} = \sqrt{3} \pm 2 \quad \text{Raíces reales simples}$$

$$I = -4 \int \frac{dz}{(z - \sqrt{3} + 2)(z - \sqrt{3} - 2)} =$$

$$= A \log |z - \sqrt{3} + 2| + B \log |z - \sqrt{3} - 2|,$$

con  $A, B \neq 0$

$$-4 = A(z - \sqrt{3} - 2) + B(z - \sqrt{3} + 2)$$

$$\hookrightarrow -4 = B \cdot 4 \rightarrow B = -1$$

$$-4 = -4A \rightarrow A = 1$$

Desharemos cambio:  $z = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \tan(t) \quad (*)$$

Como  $\cos(t) = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ ,  $\sin(t) = \frac{2z}{1+z^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tan(t) = \frac{2z}{1-z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2z}{1-z^2} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right) - 3^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}}{-2\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

De (\*) vemos que si  $x = -\frac{1}{2} \rightarrow z = 0$ ,

luego

$$z = \frac{-\sqrt{3}}{2} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+x+x^2}}{x + \frac{1}{2}}.$$

Tenemos que

$$z - \sqrt{3} + 2 = \frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{x^2+x+1}}{2x+1} - \sqrt{3} + 2 =$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{x^2+x+1} - (\sqrt{3}-2)2x - \sqrt{3} + 2}{2x+1},$$

$$z - \sqrt{3} - 2 = \frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{x^2+x+1} - (\sqrt{3}+2)2x - \sqrt{3} - 2}{2x+1}$$

Finalmente,

$$I = \log \left| \frac{z - \sqrt{3} + 2}{z - \sqrt{3} - 2} \right| = \log \left| \frac{\sqrt{x^2+x+1} - (\sqrt{3}-2)x - \sqrt{3} + 1}{\sqrt{x^2+x+1} - (\sqrt{3}+2)x - \sqrt{3} - 1} \right|.$$

7

1)  $\int x \cdot \arctan(\sqrt{x}) dx = I$  [Photonath no la hace]

Cambio  $\sqrt{x} = t \rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \rightarrow dx = 2t dt, x = t^2$

$$I = \int t^2 \arctan(t) 2t dt = \int 2t^3 \cdot \arctan(t) dt$$

↳ Por partes,  $u = \arctan(t) \dots$  (Ahora sí Photonath)  
 (Pared atan en vez de arctan)

2)  $\int \cos(\log(x)) dx$  [Photonath: pared ln en vez de log]

↳ Cambio  $t = \log(x)$

10 b)  $\int \frac{(1-x)^{1/3}}{(1+x)^{3/3}} dx = I$  [Photonath no la hace]

$$I = \int \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{1/3} \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$\text{Gambier: } \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{3}} = t \Rightarrow t^3 = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^3 + x \cdot t^3 = 1 - x \Rightarrow x(1+t^3) = 1-t^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-t^3}{1+t^3} \Rightarrow 1+x = \frac{2}{1+t^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \frac{-2}{(1+t^3)^2} 3t^2 dt$$

$$I = \int t \cdot \left( \frac{1+t^3}{2} \right)^2 \frac{-6t^2}{(1+t^3)^2} dt = -\frac{3}{2} \int t^3 dt =$$

$$= -\frac{3}{8} t^4 = -\frac{3}{8} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{4}{3}}.$$