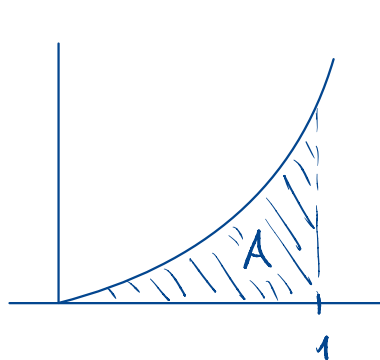


Clase 38: La integral de Riemann

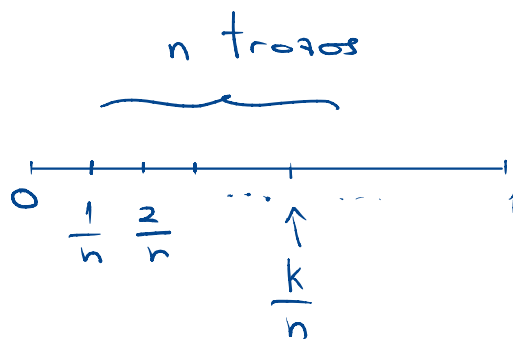
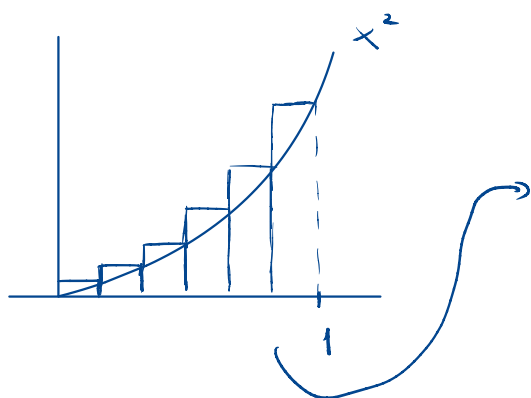
Motivación histórica: cálculo de áreas.

Ej: Método de exhaustión de Arquímedes [Clase 1]



$$f(x) = x^2$$

Idea: aproximar por rectángulos.



$$\text{Área} \approx \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \Rightarrow$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \text{Área} = \frac{1}{3} //$$

- La integral de Riemann formaliza este concepto para una amplia clase de funciones.

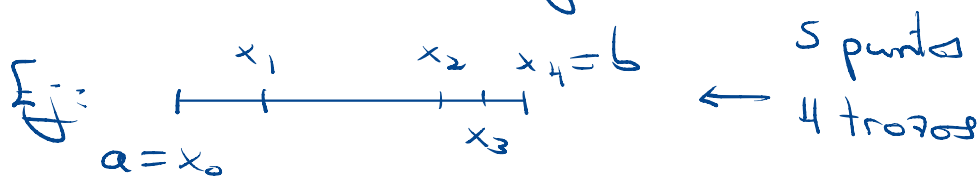
↳ Concepto intuitivo pero sutil (funciones no integrables, paradojas, ...)

- Def.: Dado un intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$, se llama partición de $[a, b]$ a cualquier conjunto finito de puntos de la forma

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Se denota $P(x_0 < x_1 < \dots < x_n)$.

Nota: Una partición con $n+1$ puntos divide al intervalo $[a, b]$ en n partes (no necesariamente iguales).



- Def.: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Dada una partición $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$, sean

$$m_k = \inf \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}, \quad k = 1, \dots, n$$

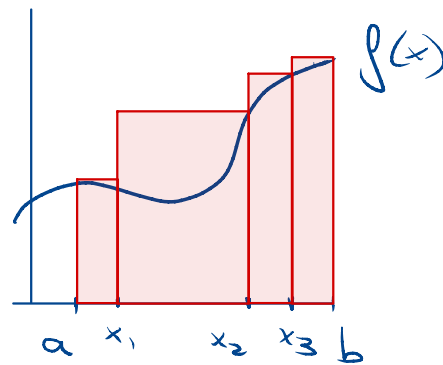
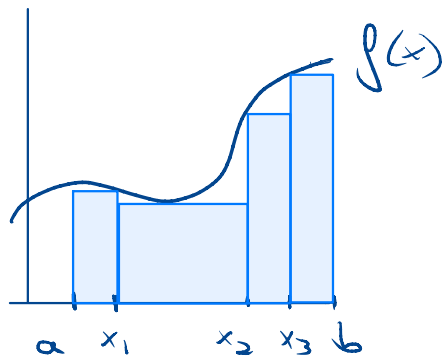
$$M_k = \sup \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}, k=1, \dots, n.$$

Se definen la **suma inferior** y **superior** de Riemann de f respecto a P como sigue:

$$I(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}),$$

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

Ej: $P = \{ a < x_1 < x_2 < x_3 < b \}$



$I(f, P) =$ suma rectángulos azules

$S(f, P) =$ suma rectángulos rojos.

- Se dice que una partición P_2 es más fina que otra P_1 si $P_1 \subset P_2$, esto es,

P_2 es como P_1 con más puntos añadidos.

De las definiciones (o de las gráficas) es claro que, para $m \leq f(x) \leq M$ (area, acotada):

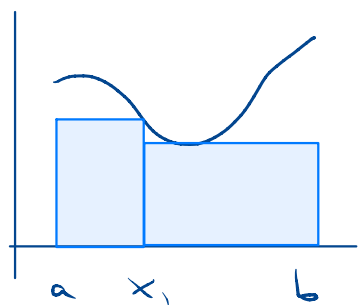
$$1) m \cdot (b-a) \leq I(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b-a)$$

2) Si Q más fina que P ($P < Q$), entonces

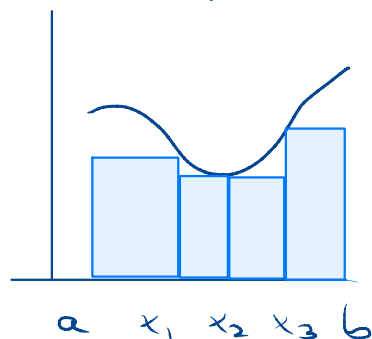
$$I(f, P) \leq I(f, Q), \quad S(f, Q) \leq S(f, P)$$

3) $I(f, P) \leq S(f, Q)$ para cualesquiera P, Q .

$$P_1 = \{a < x_1 < b\}$$



$$P_2 = \{a < x_1 < x_2 < x_3 < b\}$$



$P_1 < P_2$

$$I(f, P_1) \leq I(f, P_2)$$

• Def. Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, se llaman integrales inferior y superior de f a:

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_P I(f, P),$$

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \inf_P S(f, P).$$

Nda: Para cualesquiera P, Q ,

$$\underline{I(f, P)} = \underline{\int_a^b f(x) dx} = \overline{\int_a^b f(x) dx} = S(f, Q).$$

• Def: Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, se dice que f es integrable Riemann en $[a, b]$ si

$$\underline{\int_a^b f(x) dx} = \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

En tal caso, a ese valor común se le llama integral de f en $[a, b]$ y se denota $\int_a^b f(x) dx$.

• En general, es difícil determinar si una función es integrable. Caso particular importante:

• Teorema: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Si f continua en $[a, b] \Rightarrow f$ es integrable en $[a, b]$.
- 2) Si f está dada, y
continua en $[a, b] / \{c_1, c_2, \dots, c_m\} \Rightarrow f$ integrable en $[a, b]$.

• Propiedades básicas: Si f, g integrables en $[a, b]$:

- 1) Linealidad:
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$
$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$
- 2) Monotonía: $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$
- 3) $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
- 4) Aditividad: Si $c \in (a, b)$,
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Nota: Por 4), se define

$$\int_a^a f = 0, \quad \int_b^a f = - \int_a^b f.$$

Otras propiedades

• Teorema: [T^a de la media integral]

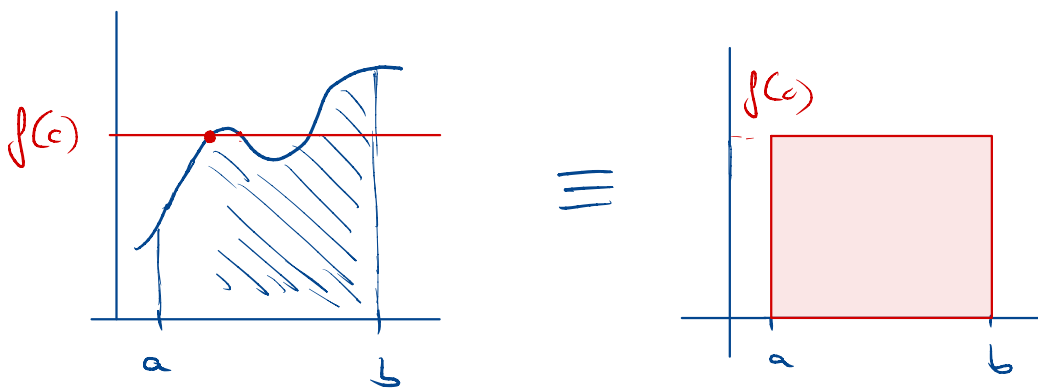
Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$
Entonces: i.e. f acotada en $[a, b]$

1) Si f integrable, $\exists \lambda \in [m, M] /$

$$\int_a^b f = \lambda(b-a).$$

2) Si f continua,
(y por tanto integrable)

$$\exists c \in [a, b] / \int_a^b f = f(c)(b-a).$$



Nota: Observad la analogía con la media de un conjunto de números:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow \text{Media} \equiv \lambda = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Podemos pensar en una función $f(x)$ definida en $[a, b]$ como un conjunto continuo de puntos, y su valor medio:

$$\lambda = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Ejemplo: La temperatura pasadas t horas después de medianoche sigue la fórmula

$$T(t) = 2 - \frac{(t-13)^2}{7}.$$

¿Temperatura media entre las 2:00 y las 14:00?

$$T_m = \frac{1}{14-2} \int_2^{14} T(t) dt = \dots (\text{número})$$

Como $T(t)$ es continua, existe algún momento t^* en el que la temperatura coincide con la temperatura media.

Es decir, $T(t^*) = T_m$ tiene solución (en este ejercicio podemos calcularla explícitamente).

Clase 39: Teorema fundamental del Cálculo

- Teorema: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable, y P una partición de $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud, i.e., $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n},$$

Entonces,

$$k = 0, 1, \dots, n.$$

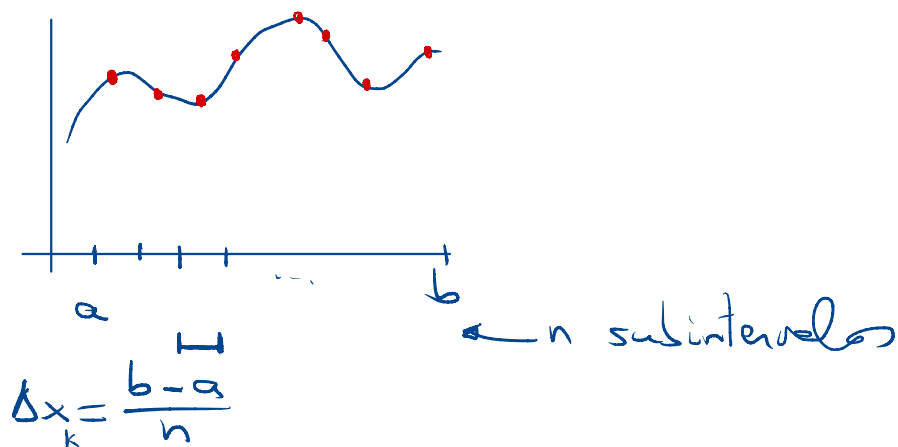
$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k),$$

con $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

→ Nota: Podemos reescribir

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(t_k) \frac{b-a}{n}$$



Esto es la base de los métodos numéricos para el cálculo de integrales:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(t_k) \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x_k}$$

Es decir, si f es integrable, efectivamente su integral es la "suma infinita" de los rectángulos cada vez más finos.

Teorema Fundamental del Cálculo

(existen pues
continua en
cercos y acotada)

Primero volvamos al T^{te} de la Media Integral:

T^{te} Media Integral: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Denotemos m, M al mín. y máx. de f en $[a, b]$.

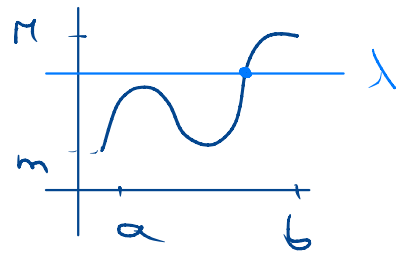
Entonces, $\exists c \in [a, b] / f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

Dem: f continua en $[a, b] \Rightarrow$ Por el T^{te} de los

valores intermedios, f alcanza todos los valores entre su mínimo y su máximo, es decir,

para todo $\lambda \in [m, M]$, $\exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = \lambda$.

Por la propiedad de monotonía de la integral,



como $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f}_{\lambda} \in [m, M] \Rightarrow \exists c \in [a, b] / f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f //$$

- Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable, definimos una nueva función

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f$$

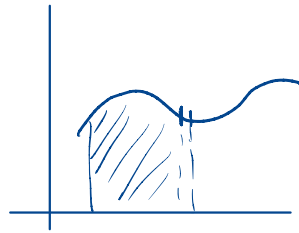
Nota: Recordamos que también se denota

$$\int_a^x f = \int_a^x \underbrace{f(s)}_{\text{"variable muda"}} ds = \int_a^x \underbrace{f(z)}_{\text{"variable muda"}} dz = \dots$$

• Teorema: Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable,

$$\left. \begin{array}{l} F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt \end{array} \right\} \text{ es continua en } [a, b].$$

Idea: Si f es continua, el área bajo ella no da saltos



• Teorema: [T² Fundamental del Cálculo]

Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$, y continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces

la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es derivable en x_0

$$\text{y } F'(x_0) = f(x_0).$$

Por tanto, si f es continua en $[a, b]$, entonces F es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

- Cordario: Toda función continua en $[a, b]$ tiene primitiva en $[a, b]$.

↳ En efecto, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es primitiva de $f(x)$, pues $F'(x) = f(x)$.

• Dem. [T^a Fund. Calc.]

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt$$

Por el T^a de la media integral, como f es continua en $[x_0, x]$ (analog. en $[x, x_0]$), se tiene

que $\exists c(x, x_0) \in [x_0, x]$, i.e., $x_0 \leq c(x, x_0) \leq x$ /

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt = f(c(x, x_0)).$$

$$\text{Luego } F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(c(x, x_0)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} c(x, x_0)\right) =$$

$$= f(x_0) //$$

f es continua
 (T^a del Sandwich)

- Cordario: Si f es continua en $[a, b]$ y g, h derivables en $[a, b]$, entonces

$$H(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \text{ es derivable,}$$

con derivada $H'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$

Dem: Es simplemente la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt &= \int_{g(x)}^0 f(t) dt + \int_0^{h(x)} f(t) dt = \\ &= \int_0^{h(x)} f(t) dt - \int_0^{g(x)} f(t) dt. \end{aligned}$$

Si llamamos $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, tenemos

$$H(x) = F(h(x)) - F(g(x)) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H'(x) &= F'(h(x))h'(x) - F'(g(x))g'(x) = \\ &= f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x). \end{aligned}$$

Ej.: Sea $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2-3x} \tan(t) dt$. $dF(x)$?

Sol.: $F'(x) = \tan(x^2-3x)(2x-3) - \tan(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

• Corolario: [Regla de Barrow]

Si f continua en $[a, b]$ y G primitiva de f , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) \equiv G(x) \Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Dem.: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es primitiva de f por el
1^{er} Fund. del cálculo.

Luego $\int_a^b f(x) dx = F(b).$

Ahora,

las primitivas solo se diferencian en una constante,

luego $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in [a, b]$.

Como $F(a) = 0 \Rightarrow C = -G(a)$,

luego $F(b) = G(b) - G(a)$ ✓.

Clase 40: Cambio de variable, Integ. por partes.

1ª Fund. Calcul: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b] \rightarrow$

$$\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ derivable en } [a, b] \text{ y}$$

$$F'(x) = f(x).$$

Regla de Barrow: f continua con primitiva G ,
entonces $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$.

• Teorema: [2ª Tª Fundamental del Calcul Integral]

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y G primitiva de f .

Entonces,

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

• Nota: 1) Hay funciones no continuas pero integrales.

2) Hay funciones integrales sin primitiva

3) Hay funciones no integrales con primitiva

[Ejemplos: ejercicio casa (no en apuntes)]

• Lema: $H(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{si } f \text{ continua,} \\ h, g \text{ derivables} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow H'(x) = f(h(x)) h'(x) - f(g(x)) g'(x)$$

• Ejercicio: (01/22) ¿ V / F? Demostren

$$f(x) = \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{dt}{1+t+5t^2} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Sol: Defino $g(x) = \frac{1}{1+x+5x^2}$

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt \rightsquigarrow G'(x) = g(x).$$

Entonces, $f(x) = G(\sin(x)) - G(\cos(x)) \Rightarrow$

$$f'(x) = G'(\sin(x)) \cos(x) - G'(\cos(x)) (-\sin(x)) =$$

$$= g(\sin(x)) \cos(x) + g(\cos(x)) \sin(x) =$$

$$= \frac{\cos(x)}{1+7\sin(x)+5\sin^2(x)} + \frac{\sin(x)}{1+7\cos(x)+5\cos^2(x)}.$$

• Ejercicio: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{2x} \sin(\sin(t)) dt}{x^2} = I$

Sol: $I = \left(\frac{0}{0} \right) \xrightarrow{\text{L'Hôp.}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \int_x^{2x} \sin(\sin(t)) dt}{2x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(2x)) \cdot 2 - \sin(\sin(x))}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 2x - x + o(x^2)}{2x} = \frac{3}{2}.$$

• Ejercicio: (01/22) ¿ V / F? Demostrar.

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos(2x)}{2}} dx = 1, \quad [\text{Es falso} \rightarrow]$$

Sol: $\frac{1 + \cos(2x)}{2} = \cos^2(x) \Rightarrow \sqrt{\frac{1 + \cos(2x)}{2}} = |\cos(x)|$

Así,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |\cos(x)| dx &= \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x) dx = \\ &= \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} - \sin(x) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1 - 0 - (0 - 1) = 2. \end{aligned}$$

• Teorema del cambio de variable:

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con derivada integrable, donde $a = g(c)$, $b = g(d)$.

Entonces:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_c^d f(g(x)) g'(x) dx.$$

$t = g(x) \rightsquigarrow$ Límites de integración: $c = g^{-1}(a)$
 $dt = g'(x) dx$ $d = g^{-1}(b)$

• Ejercicio: P7 Calcular la integral $\int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$.

Indicación: Hacer el cambio $t = \pi - x$.

$$\begin{aligned} \underline{\text{Sol:}} \quad I &= \int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = - \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} dt = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) (\cancel{\sin \pi} \cos(-t) + \cos \pi \sin(-t))}{1 + (\cos \pi \cos(-t) - \cancel{\sin \pi} \sin(-t))^2} dt = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin(t)}{1 + \cos^2 t} dt =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2 t} dt - \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{t \cdot \sin(t)}{1 + \cos^2 t} dt}_{\equiv I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \left[-\arctan(\cos t) \right]_0^{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \left(-\arctan(\cos(\pi)) + \arctan(\cos(0)) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\arctan(1) + \arctan(1) \right) = \pi \cdot \arctan(1).$$

• lema: Integración por partes

$$\int_a^b u(x) \underbrace{v'(x)}_{dv} dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b v(x) \underbrace{u'(x)}_{du} dx$$

• Ejercicios: P11, P4, P8, P9.

Clase 41: Integrales Impropias I.

P11 $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} |1-t^2| dt, x \in [0, 2]$

¿Continuidad, derivabilidad? ¿ $F'(x)$ donde exista?

Sol. $g(t) = |1-t^2|,$

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt \rightarrow F(x) = G(\sqrt{x}).$$

$\uparrow$ Fund. Cál.

g es continua en $[0, 2] \Rightarrow G$ es continua y derivable en $[0, 2]$

- Como $\sqrt{x}$ continua en $[0, 2]$, F también por ser composición de funciones continuas.
- Como $\sqrt{x}$ derivable en $(0, 2]$, F también en $(0, 2]$.

En $x = 0$:

L'Hôp (pues $F(x)$ derivable en $x > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) \downarrow$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G'(x) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|1-x^2|}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

Luego F derivable en $(0, 2]$, $F'(x) = \frac{|1-x^2|}{2\sqrt{x}}.$

- Integrales impropias

Hasta ahora, para definir la integral de f , hemos requerido siempre que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fuese acotada.

Veamos como extender el concepto cuando $a = -\infty$, $b = +\infty$, o cuando f no está acotada en a o b .

- Def: Integral impropia de 1ª especie

Sea $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ para cualquier $b > a$. Se llama integral impropia de primera especie de f en $[a, +\infty)$ al límite

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Si el límite existe y es finito, se dice que la integral es convergente. En caso contrario, se dice divergente.

Análogamente,
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

- Si conocemos una primitiva de f , podemos estudiar la convergencia sin más que calcular el límite correspondiente.

Ejemplos fundamentales

$$1) I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-p} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Si } p \neq 1: I_1 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} (b^{-p+1} - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 1 \\ +\infty & \text{si } p < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $p = 1$:

$$I_1 = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\log(x)]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \log(b) = +\infty.$$

Por tanto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} \text{converge si } p > 1 \\ \text{diverge si } p \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 2) \int_0^{+\infty} e^{-c \cdot x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-c \cdot x} dx = \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{-c \cdot x}}{-c} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{-c \cdot b} - 1}{-c},
 \end{aligned}$$

luego

$$\int_0^{+\infty} e^{-c \cdot x} dx \begin{cases} \text{converge si } c > 0 \\ \text{diverge si } c \leq 0 \end{cases}$$

• Propiedades:

$$1) \int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

$$2) \int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx + \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

↑
(si ambas convergen)

- Normalmente, es difícil o imposible calcular una primitiva y estudiar explícitamente el límite.
En su lugar, se pueden "criterios de convergencia".

• Ejemplo: $\int_1^{+\infty} e^{-x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ ¿converge?

↳ Idea: $\left| \int_1^{+\infty} e^{-x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \right| \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e}$

En general, como $\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f(x)| dx$, se tiene que:

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

→ Cuando $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, se dice que

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge absolutamente.

→ Si $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ diverge pero $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge, entonces se dice que $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge condicionalmente.

Esto puede ocurrir típicamente cuando f oscila entre valores positivos y negativos.

• Ejemplo: Probar que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ es
condicionalmente convergente.

Sol: Tenemos que probar dos cosas:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge

2) $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ diverge.

1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{x} \\ dv = \sin(x) dx \end{array} \right\}$

$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\cos(x)}{x} \right]_1^b + \int_1^b \frac{\cos(x)}{-x^2} dx =$

$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\cos(b)}{b} + \cos(1) - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right] =$

$= \cos(1) - \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx$

Como $\left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\cos(x)|}{x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$$\text{y } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = 1 \text{ converge, entonces}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx \text{ también, luego } \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \text{ también.}$$

2) Lo veremos más adelante.

Criterios de convergencia

Primero vamos a considerar funciones positivas $f \geq 0$.
(p.ej. si ponemos valores absolutos).

• Criterio de comparación:

Sean $f: [a, +\infty) \rightarrow \underline{[0, +\infty)}$ integrales en $[a, b] \forall b > a$.

Si $\exists x_0 \geq a / f(x) \leq g(x) \forall x \geq x_0$, entonces

$$1) \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ convergente,}$$

$$2) \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ divergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ divergente.}$$

Clase 42: Ejercicios (recuperación clase)

PS6 la suma de las áreas de un cubo y una esfera es 1.
(Hoja 4)

d Dimensiones / suma de los volúmenes es mínima?
nétina

$$Se_3$$

Cubo: $A_c = L^2$, $V_c = L^3$

Esfere: $A_e = \pi R^2$, $V_e = \frac{4}{3} \pi R^3$

Donc : $1 = L^2 + \pi R^2$

Queremos mín./máx. $V = L^3 + \frac{4}{3}\pi R^3$.

Como $1 = L^2 + \pi R^2 \Rightarrow L^2 = 1 - \pi R^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Definimos $V(R) = (1 - \pi R^2)^{3/2} + \frac{4}{3} \pi R^3$

y calculamos su máx./mín. absoluto con las condiciones $R \geq 0$

$$L > 0 \leadsto 1 - \pi R^2 > 0 \Rightarrow R^2 < \frac{1}{\pi}$$

Esta es, máx./mín $V(R)$ con $R \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

PH

(Hoja 5) $I_k = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{k/2}}, k=1,2,3,4,5,6.$

Sl: $k=1: I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Cambio: $x = \tan(t) \rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2(t)}$
 $1+x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}$

$$I_1 = \int \frac{|\cos(t)|}{\cos^2(t)} dt = \int \frac{dt}{|\cos(t)|}$$

Para $t / \cos(t) > 0: I_1 = \int \frac{dt}{\cos(t)}$

Cambio $u = \sin(t) \rightarrow du = \cos(t) dt$

$$I_1 = \int \frac{du}{1-u^2} = \int \frac{1/2}{1+u} du + \int \frac{1/2}{1-u} du =$$

$$= \frac{1}{2} \log |1+u| - \frac{1}{2} \log |1-u| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right|.$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \sin(t) \\ x = \tan(t) \end{array} \right\} 1+x^2 = \frac{1}{1-u^2} \rightarrow 1-u^2 = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^2 = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow u = \frac{\pm x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Por tanto,

$$I_1 = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \right| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} - x} \right|$$

• $k=2,3,4,5,6$: $I_k = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{k/2}}$

$$x = \tan(t) \rightarrow I_k = \int \frac{(\cos^2(t))^{k/2}}{\cos^2(t)} dt =$$

$$= \int |\cos(t)|^{k-2} dt \quad \text{trigonometría ...}$$

Nota: Habríamos resuelto entre otras

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad (\text{racional con complejos m\u00faltiples}).$$

Ejercicio: (01/2022)

Prueba que para $x < 0$ se tiene que

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{x}{x^2+1}.$$

Sol:

$$g(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1} \quad \text{¿ } g(x) < 0 \text{ si } x < 0?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} - \frac{x^2+1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{-1}{x^2+1} - \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{-1 - x^2 + x^2 - 1}{(1+x^2)^2} = \frac{-2}{(1+x^2)^2} < 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) < 0 \quad \forall x < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(x) < 0 \text{ en } (-\infty, 0).$$

Ejercicios:

1) Polinomio de Taylor de:

• $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ de grado 2 en $x = 0$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{(\log(1+x))^2} \log(x) = I_1$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{(\log(1+x))^3} \log(x) = I_2$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{(\log(1+x))^2} \log(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = I_3$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = I_4$

Sol:

1) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ no es derivable en $x = 0$, no se puede construir su pol. de Taylor.

2) Para $x \approx 0$,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \quad \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4),$$

$$\log(1+x) = x + o(x),$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{\log^2(1+x)} \log(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{6} + \frac{1}{3} \right) x \cdot \log(x) = 0.$$

3) $I_2 = +\infty$

4) $I_3 = 0$

5) $I_4 \neq$ $\left(\begin{array}{l} \text{Dado } x \text{ arbitrariamente cerca de } 0, \\ \text{hay números entre } 0 \text{ y } x \text{ para los} \\ \text{que la función vale } 0, \geq 1, \leq -1. \end{array} \right)$

• Ejercicio: (01/22)

¿Verdadero o falso? (Demostrar)

$$\sqrt[4]{e} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq 2e^2.$$

• Ejercicio: (01/23)

Demuestra que para $n \in \mathbb{N}$, $a \neq -1$:

$$\int x^a \log^n(x) dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \log^n(x) - \frac{n}{a+1} \int x^a \log^{n-1}(x) dx,$$

Aplicar para calcular $\int x^2 \log^3(x) dx$.

• Ejercicio: (06/22)

Dada la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(3, 4)$, encontrar el punto de la curva que se encuentra a la mínima distancia de $(3, 4)$.