

Clase 20: Teoremas sobre funciones derivables.

Objetivos:

- Determinar máximos y mínimos de una función
↳ Optimización.
- Determinar cuántas soluciones tiene una ecuación
- Representar funciones (crecimiento, convexidad, ...)

Extremos relativos y absolutos

• Def.: Max./min absoluto

Se dice que $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un

→ máximo absoluto en $x_0 \in S$ si $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in S$,

→ mínimo absoluto en $x_0 \in S$ si $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in S$.

• Def.: Max./min. relativo

Se dice que $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo relativo o local en $x_0 \in S$ si

$\exists \delta > 0$ / $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple $f(x) \leq f(x_0)$.

Análogo, mínimo relativo en $x_0 \in S$ si $\exists \delta > 0 /$

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple $f(x_0) \leq f(x)$.

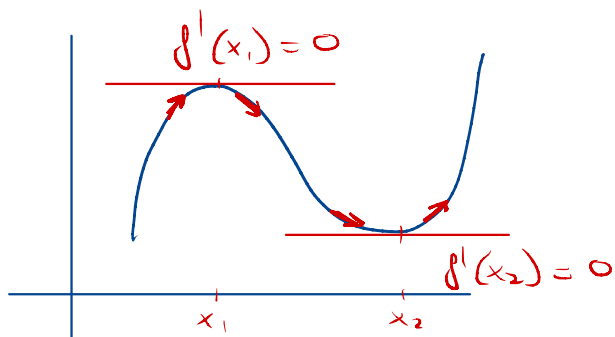
- Si las desigualdades son estrictas ($f(x_0) < f(x)$, $f(x_0) > f(x)$), entonces se llaman extremos relativos estrictos.

Nota: Los extremos absolutos son también extremos relativos (pero no al revés).

• Teorema: [Condición necesaria de extremos relativos]

Sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} 1) x_0 \text{ punto interior de } S \\ 2) f \text{ derivable en } x_0 \\ 3) f \text{ tiene extremo relativo en } x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$



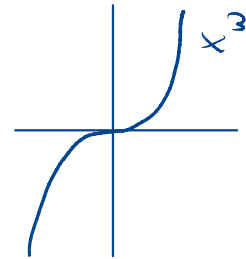
"Dem": Como f derivable, los límites laterales de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ coinciden.

Como en x_0 f tiene mín/máx, basta ver que el signo de los laterales es opuesto, luego ha de ser 0.

Notas:

1) $f'(x_0) \not\Rightarrow f$ tiene extremo relativo en x_0 .

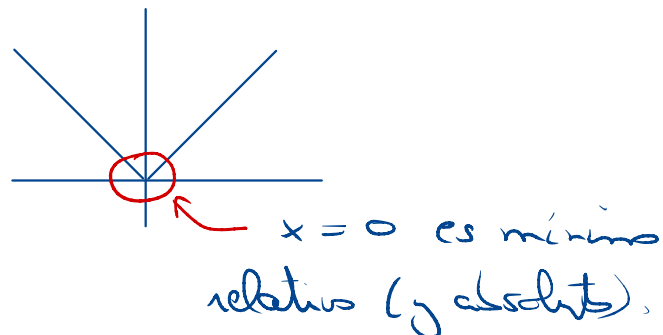
↳ Ejemplo: $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$



Es decir, el teorema da condiciones necesarias pero no suficientes para la existencia de extremos relativos.

2) El teorema vale para funciones derivables. Pero f puede tener extremos relativos aunque no sea derivable.

↳ Ej: $f(x) = |x|$



→ Cálculo de extremos

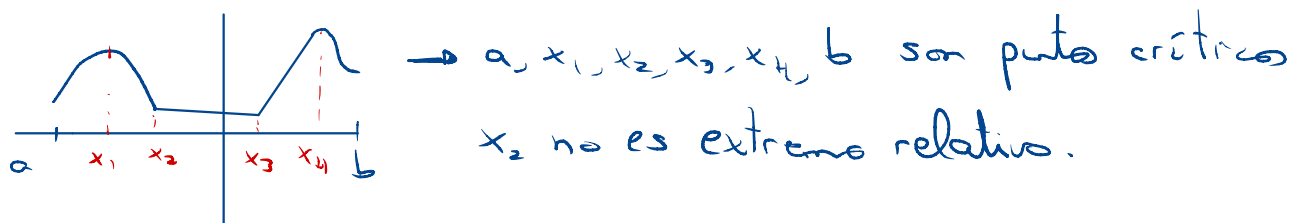
1) Extremos relativos: los candidatos a extremos relativos son los llamados "punto crítico".

Se llaman puntos críticos de $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ a

a aquellos $x_0 \in S$ donde

- x_0 no pertenece al interior de S (puntos frontera), o
- f no derivable en x_0 , o
- $f'(x_0) = 0$.

Más adelante veremos en qué casos los puntos críticos son extremos relativos.



2) Extremos absolutos:

Lo primero es asegurarse de que exista. Recordemos que el T^{te} de Weierstrass dice que:

$\| f \text{ continua en } [a, b] \Rightarrow \text{tiene extremos absolutos} \|$

Si existen, se alcanzan en los puntos críticos.

↳ Calcular todos los puntos críticos.

↳ Evaluar f en esos puntos, y elegir aquel donde f sea mayor/menor.

• Ejemplo: Hallar extremos absolutos de

$$f(x) = x^{2/3} (5 - 2x) \text{ en } [-1, 2].$$

Sol: f continua en $[-1, 2] \Rightarrow$ tiene mín. y máx. abs.

1) Puntos críticos:

1.1) $x_1 = -1, x_2 = 2$ (no interiores)

1.2) Puntos donde f no sea derivable: $x_3 = 0$.

1.3) Punto donde $f'(x) = 0$.

$$\hookrightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} (5 - 2x) - 2x^{2/3}$$

$$\text{Así, } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} (5 - 2x) - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 - 4x - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

En total, $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 1$.

2) Evaluamos f :

$$f(-1) = 7, f(2) = 4^{1/3}, f(0) = 0, f(1) = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Mínimo absoluto en $x = 0$ con valor $f(0) = 0$.

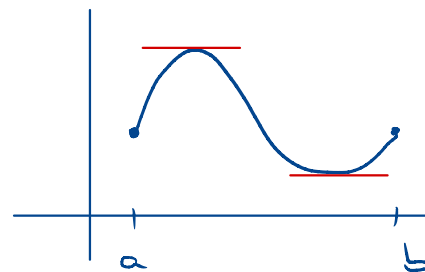
Máximo absoluto en $x = -1$ con valor $f(-1) = 7$.

A continuación veremos los teoremas de Rolle, Lagrange, Cauchy y L'Hôpital.

• Teorema de Rolle: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ f \text{ derivable en } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f'(c) = 0.$$

Dem:



Como f continua en $[a, b]$, por
T^a de Weierstrass f alcanza mín.

y máx. absolutos. Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ puntos donde
 f alcanza mín/máx absolutos, respect. de. Entonces:

1) Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x) = \text{constante} \Rightarrow f'(x) = 0$.

2) Si $f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Como $f(a) = f(b)$, no pueden estar x_1 y x_2 a la
vez en los extremos. llamemos x_i al que está
en el interior, $x_i \in (a, b)$. Entonces, por la
condición necesaria de extremo relativo, $f'(x_i) = 0$.

Nota: El T^o de Rolle sirve para estudiar el n^o de soluciones de una ecuación.

Ejercicio: 43 a) Prueba que la ecuación

$$\arctan(x) + e^x + \frac{x}{1+x^2} = 0$$

tiene una única solución real, y que está en el intervalo $(-1, 0)$.

Sol: $g(x) = \arctan(x) + e^x + \frac{x}{1+x^2}$ continua en $\mathbb{R}$.

$$g(0) = e^0 = 1 > 0,$$

$$g(-1) = -\arctan(1) + \frac{1}{e} - \frac{1}{2} < 0$$

↑
puesto que $e > 2$

Por T^o Bolzano en $[-1, 0]$, $\exists x_0 \in (-1, 0) / g(x_0) = 0$.

Veamos que además es la única solución en $\mathbb{R}$.

Por reducción al absurdo: supongamos que existe más de una. Sean $x_1 < x_2$ dos soluciones. Entonces,

$$\left. \begin{array}{l} g(x_1) = 0 = g(x_2) \\ g \text{ continua en } [x_1, x_2] \\ g \text{ derivable en } (x_1, x_2) \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{Rolle}]{\text{T}^o \text{ de}} \exists c \in (x_1, x_2) / g'(c) = 0.$$

Sin embargo, vemos que $g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + e^x + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = e^x + \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0,$$

luego $x_0 \in (-1, 0)$ es la única solución en $\mathbb{R}$. //

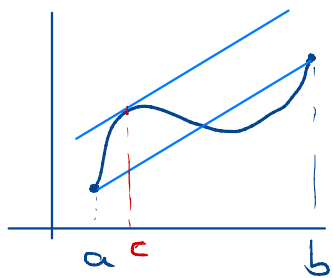
Clase 21: TVM y consecuencias

• Teorema de Lagrange: [T^a del valor medio, TVM]

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) .

Entonces,

$$\exists c \in (a, b) / f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



"In $[a, b]$, siempre hay un punto donde la tangente a f es paralela a la recta secante de a a b ".

Dem: Queremos probar que $\exists c \in (a, b) /$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esto es, $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Vamos a usar el T^a de Rolle.

Sea $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} x$, de forma que

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Como se tiene que

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} a = \frac{b \cdot f(a) - a f(b)}{b-a},$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} b = \frac{-a f(b) + b f(a)}{b-a},$$

veremos que

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ continua en } [a, b] \\ g \text{ derivable en } (a, b) \\ g(a) = g(b) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Teorema de Rolle} \\ \Rightarrow \exists c \in (a, b) / g'(c) = 0. \end{array}$$

$$\text{Esto es, } g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Consecuencias del TVM:

En las siguientes corolarios, consideramos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) .

- Corolario 1: $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ es constante en $[a, b]$.

Dem: Dados dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in [a, b]$,
 $x_1 < x_2$

se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [x_1, x_2] \\ f \text{ derivable en } (x_1, x_2) \end{array} \right| \Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2) /$$
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Por tanto, como $f'(c) = 0$, concluimos $f(x_2) = f(x_1)$.

- Corolario 2: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ estrict. creciente en $[a, b]$.
 $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ estrict. decreciente en $[a, b]$.

Dem:

Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. Por TVM en $[x_1, x_2]$,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \text{ con } c \in (x_1, x_2).$$

$$\text{Si } f'(x) > 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) + \underbrace{f'(c)}_{>0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > f(x_1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Esto es, f crece.

El caso $f'(x) < 0$ es análogo.

- Corolario 3: $[T^2 \text{ de incrementos finitos}]$

$$|f'(x)| \leq M \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|.$$

Dem: Por TVM, $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, para

algún $c \in (x_1, x_2)$. Tomando valor absoluto,

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)(x_2 - x_1)| = |f'(c)| |x_2 - x_1| \leq M |x_2 - x_1|.$$

• Ejercicio: Probar que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

Sol: $f(x) = \sin(x)$ continua y derivable en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \cos(x), \quad |f'(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por TVM,

$$|f(x) - f(y)| \leq 1 \cdot |x - y|.$$

• Ejercicio: Probar que $\forall x \in (0, 1)$ se tiene que

$$\log(1+x^2) < 2 \arctan(x).$$

Sol:

Definimos $g(x) = 2 \arctan(x) - \log(1+x^2)$, que es continua y derivable en $\mathbb{R}$, luego en particular en $(0, 1)$.

Vemos que

$$g(0) = 0.$$

Además,

$$g'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2(1-x)}{1+x^2} > 0 \quad \text{si } x \in [0, 1).$$

Como $g(0)=0$ y g estrid. creciente en $[0,1)$,
concluimos que $g(x) > 0$ en $(0,1)$.

- Ejercicio: Estudiar intervalos de crecimiento de
 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Sol. Como f es continua y derivable en $\mathbb{R}$, estudiamos
el signo de $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$

$$\text{Factorizamos: } x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2 \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}$$

Luego $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$, $\begin{matrix} - & -1 & + & 3 & + \\ & | & & | & \\ & \hline & - & - & 3 & + \\ & | & & | & \\ & & & & (x-3) \end{matrix}$
por tanto

$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$$

$$f'(x) < 0 \text{ si } x \in (-1, 3)$$

Concluimos que f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$
decreciente en $(-1, 3)$.

Clase 22: TVMg, L'Hôpital

Terminamos el tema con la Regla de L'Hôpital.
Necesitamos primero el teorema de Cauchy.

• Teorema de Cauchy: [TVM generalizada]

$$\left. \begin{array}{l} f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{continuas en } [a, b] \\ \text{derivables en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) /$$

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Dem: Procedemos como en el TVM.

Definimos

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)),$$

de forma que

$$h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)).$$

Vemos que

$$h(a) = f(a)g(b) - f(a)g(a) - g(a)f(b) + g(a)f(a)$$

$$h(b) = f(b)g(b) - f(b)g(a) - g(b)f(b) + g(b)f(a)$$

Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} h \text{ continua en } [a, b] \\ h \text{ derivable en } (a, b) \\ h(a) = h(b) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Rolle}} \\ \text{T}^{\text{a}} \text{ de } \end{array} \exists c \in (a, b) /$$

$$h'(c) = 0$$

Nota: Tomando $g(x) = x$ se obtiene el TVM.

• Teorema: Regla de l'Hôpital [Caso $(\frac{0}{0})$ en un punto]

Sean $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables, $x_0 \in [a, b]$.

$$\left. \begin{array}{l} 1) g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \\ 2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ 3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (L \text{ real} \\ \quad \text{o infinito}) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dem: Supongamos $L \in \mathbb{R}$ (los casos $L = +\infty, -\infty$ se demuestran análogamente).

"Esquema" de la prueba (detalles (*) en apuntes).

Dado $x \in (a, b)$, aplicamos el TVR generalizado en $[x_0, x]$:

$$\exists c_x \in (x_0, x) / (f(x) - f(x_0)) g'(c_x) = f'(c_x) (g(x) - g(x_0)).$$

Como $f(x_0) = g(x_0) = 0$, podemos escribir (*)

$$f(x) = f(x) - f(x_0), \quad g(x) = g(x) - g(x_0).$$

Así, como $g'(x) \neq 0$, obtenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \quad (*)$$

Ahora usamos que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$:

Como $c_x \in (x_0, x)$,

(*)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{c_x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \checkmark$$

→ Otras versiones:

Teorema: $f, g : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables.

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) \neq 0 \text{ en } (a, +\infty) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ (real o } \pm\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

→ También sirve cuando $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$,
y para indeterminaciones $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Nota:

1) Si no se cumplen las condiciones del teorema,
el resultado puede ser erróneo.

$$\text{Ej: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)}$$

2) A veces aunque se pueda usar, no sirve.

$$\begin{aligned} \text{Ej: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \dots \end{aligned}$$

3) Suele ser útil para $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

↳ Otras cosas son transformadas en esas:

$$(0 \cdot \infty) = \left(\frac{\infty}{\frac{1}{0}} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$(0 \cdot \infty) = \left(\frac{0}{\frac{1}{\infty}} \right) = \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$1^{\infty} = e^{\ln 1^{\infty}} = e^{\infty \ln 1} = e^{\infty \cdot 0}$$

$$0^0 = e^{\ln 0^0} = e^{0 \ln 0} = e^{0 \cdot (-\infty)}$$

$$\infty^0 = e^{\ln \infty^0} = e^{0 \ln \infty} = e^{0 \cdot \infty}$$

$$\infty - \infty \rightsquigarrow \underbrace{f(x)}_{\rightarrow \infty} - \underbrace{g(x)}_{\rightarrow \infty} = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}.$$

• Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} =$$

$$= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + x e^x} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicios: 32 3 e) 37 9

32 $f(x) = x + \sin(x) \cos(x),$
 $g(x) = e^{\sin(x)} (x + \sin(x) \cos(x)).$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, pues $e^{\sin(x)} \in [\tilde{e}', e].$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x) \cos(x)}{e^{\sin(x)} (x + \sin(x) \cos(x))} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\sin(x)}} \quad \nexists$ pues oscila entre $\tilde{e}'$ y e .

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Calculamos $f'(x)$, $g'(x)$:

$$f'(x) = 1 + \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{\sin(x)} \cos(x) (x + \sin(x) \cos(x)) + e^{\sin(x)} (1 + \cos^2(x) - \sin^2(x)) = \\ &= e^{\sin(x)} \cos(x) (x + \sin(x) \cos(x)) + e^{\sin(x)} \cdot 2\cos^2(x) \end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cos^2(x)}{e^{\sin(x)} \cos(x) (x + \sin(x) \cos(x)) + e^{\sin(x)} \cdot 2\cos^2(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \frac{2\cos(x)}{e^{\sin(x)} \left[1 + \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} + \frac{2\cos(x)}{x} \right]} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \frac{2\cos(x)}{e^{\sin(x)}} = 0.$$

$$\rightarrow 0 \quad \text{acotado} \leftarrow \left| \frac{2\cos(x)}{e^{\sin(x)}} \right| \leq \frac{2}{e^1} = 2e.$$

d) Aunque $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, no podemos usar la regla de l'Hôpital porque vemos que en

cualquier intervalo $(M, +\infty)$, $M \in \mathbb{R}$, hay puntos donde $g'(x)$ se anula.

En efecto,

$$g'(x) = e^{\sin(x)} \cos(x) (x + \sin(x) \cos(x)) + e^{\sin(x)} \cdot 2 \cos^2(x),$$

luego para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $g'((2k+1)\frac{\pi}{2}) = 0$.

Clase 23: Ejercicios

3 e) Máx. y mín. absolutos de $f(x) = e^{-x^2}$ en

1) $[-1, 1]$, 2) $(0, 1)$, 3) $\mathbb{R}$.

Sl: Buscamos puntos críticos y evaluamos.

Necesitamos $f'(x) = -2x e^{-x^2}$.

1) • Puntos no interiores: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

• Donde f no es derivable: f derivable en $\mathbb{R}$.

• Donde $f'(x) = 0$: $-2x e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \equiv x_3$.

Evaluamos: $f(-1) = e^{-1}$, $f(0) = 1$, $f(1) = e^{-1}$.

Máx. absoluto en $x=0$ con valor $f(0)=1$.

Mín. absoluto en $x=-1$ y $x=1$ con valor
 $f(1)=f(-1)=e^{-1}$.

- 2) • Todos los puntos son interiores.
• f derivable en $\mathbb{R}$.
• $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \notin (0,1)$.

No hay puntos críticos.

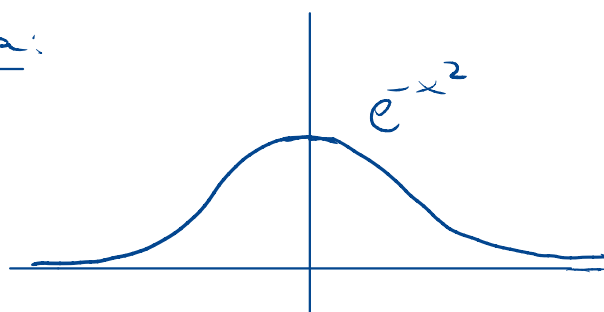
f no tiene máx. ni mín. absoluto en $(0,1)$.

- 3) Único punto crítico $x=0$.

f tiene máx. abs. en $x=0$ con valor $f(0)=1$.

No tiene mín. abs.

Nota:



$$f(x) = e^{-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

f es par. $f'(x) = -2x e^{-x^2} \Rightarrow$ f creciente en $(-\infty, 0)$
 f decreciente en $(0, \infty)$.

En $\pm\infty$ hay una asíntota horizontal, pues

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = 0.$$

37

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x^2) + 2 \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ \pi & x = 0 \end{cases}$$

a) Continuidad y derivabilidad.

Continua y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser composición de funciones elementales.

En $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\log(1+x^2)}_{\rightarrow \log(1)=0} + \underbrace{2 \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}_{2 \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{0^+}\right)} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \log(1+x^2) + 2 \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\pi$$

luego f no es continua en $x=0$.

↳ Es continua por la derecha.

discontinua por la izquierda.

↳ Discontinuidad de salto.

Seo puede ser derivable por la derecha en $x=0$.
Lo estudiamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \pi}{x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0} \right) \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2x}{1+x^2} + 2 \frac{1}{1+(1/x)^2} \cdot \frac{-1}{x^2}}{1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(x-1)}{1+x^2} = -2.$$

Luego sí es derivable por la derecha en $x=0$.

b) Para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{1+x^2} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{1+x^2} < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

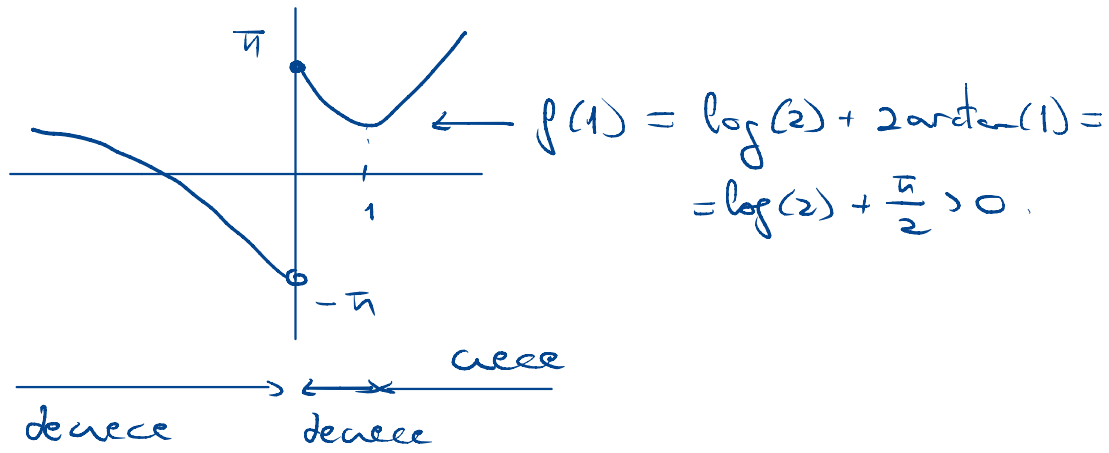
Como f no es derivable en $x=0$, tenemos que

f es estrict. creciente en $(1, +\infty)$.

f es estrict. decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

Nota: No es correcto decir que f es

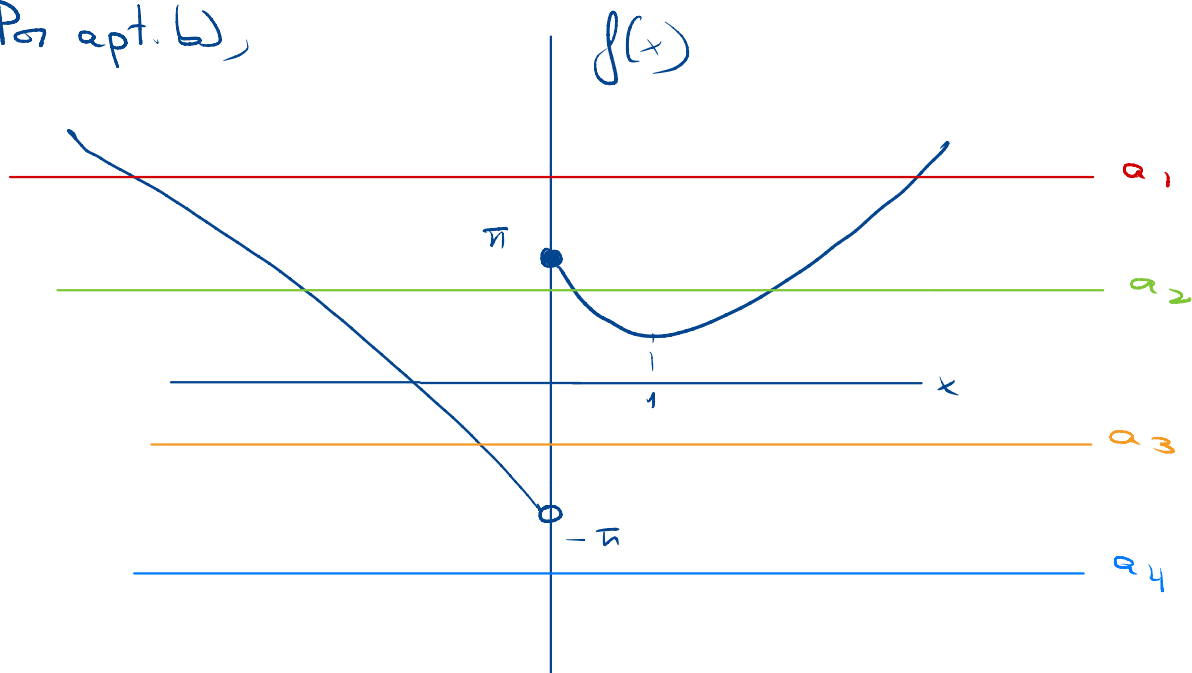
decreciente en $(-\infty, 1)$, puesto que en $x=0$ hay un salto, y de hecho ahí la función crece.



c) ¿a / $f(x) = a$ una única solución?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Por apt. b),



Gráficamente, vemos que $f(x) = a$ tiene:

- 1) Si $a > \pi$, dos soluciones: $x_1 \in (-\infty, 0)$,
 $x_2 \in (1, \infty)$
- 2) Si $a \in (1, \pi]$, tres soluciones: $x_1 \in (-\infty, 0)$,
 $x_2 \in [0, 1)$
 $x_3 \in (1, \infty)$
- 3) Si $a = 1$, dos soluciones: $x_1 \in (-\infty, 0)$
 $x_2 = 1$.
- 4) Si $a \in (-\pi, 1)$, una solución: $x_1 \in (-\infty, 0)$
- 5) Si $a \leq -\pi$, no hay soluciones.

9

a) Prueba que $\frac{x}{x-1} = \log(x-1)$ tiene una única solución en $(1, +\infty)$.

Sol: Sea $g(x) = \frac{x}{x-1} - \log(x-1)$.

g es continua y derivable en $(1, \infty)$.

Vemos que $g(2) = 2$. Además,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} - \log(x-1) = +\infty - (-\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 - \infty = -\infty.$$

Estudiamos la derivada:

$$g'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-1-x+1}{(x-1)^2} = \frac{-x}{(x-1)^2},$$

Entonces, $g'(x) < 0 \quad \forall x \in (1, \infty)$.

Como g derivable en $(1, \infty)$ y $g'(x) \neq 0$, por el T^o de Rolle solo puede tener una raíz.

Por los límites anteriores, sabemos que al menos tiene una:

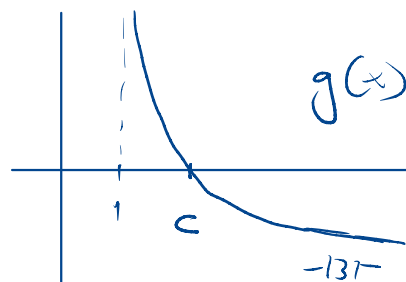
g continua en $[2, e^2+1]$

$$g(2) = 2 > 0$$

$$g(e^2+1) = 1 + \frac{1}{e^2} - \log(e^2) = 1 + \frac{1}{e^2} - 2 = -1 + \frac{1}{e^2} < 0$$

$$\xrightarrow{\text{T}^o \text{ Rolle}} \Rightarrow \exists c \in (2, e^2+1) / g(c) = 0. //$$

En efecto,



b) Crec. / decrec. de $f(x) = (x-1)^{1/x}$ en $(1, +\infty)$.

Sol: $f(x) = e^{\log (x-1)^{1/x}} = e^{\frac{1}{x} \log(x-1)},$

continua y derivable en $(1, \infty)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{x} \log(x-1)} \cdot \left[\frac{-\frac{1}{x^2} \log(x-1)}{1} + \frac{1}{x(x-1)} \right] = \\ &= e^{\frac{1}{x} \log(x-1)} \cdot \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{x-1} - \log(x-1) \right) \end{aligned}$$

Como $e^{\frac{1}{x} \log(x-1)} \cdot \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, vemos que

$$f'(x) > 0 \iff \frac{x}{x-1} - \log(x-1) > 0.$$

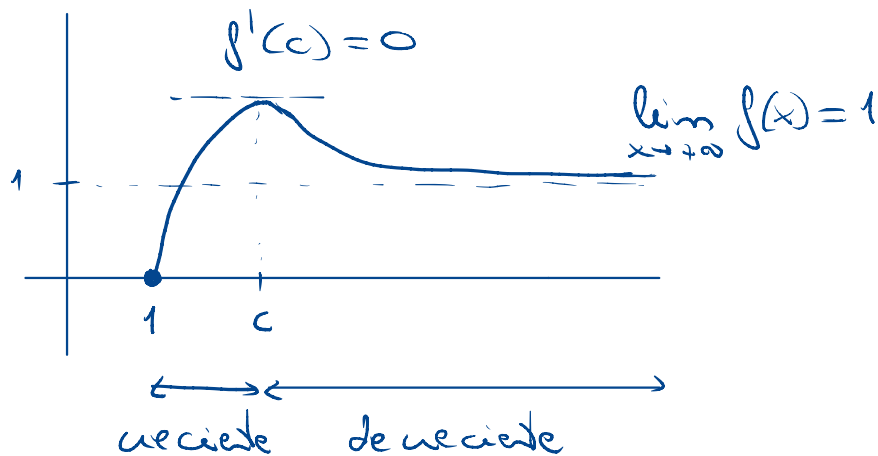
Por apl. a), en $x \in (1, \infty)$ tenemos que

$$f'(x) > 0 \iff x \in (1, c), \leftarrow f \text{ estúd. cec.}$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in (c, \infty) \leftarrow f \text{ estúd. decrec.}$$

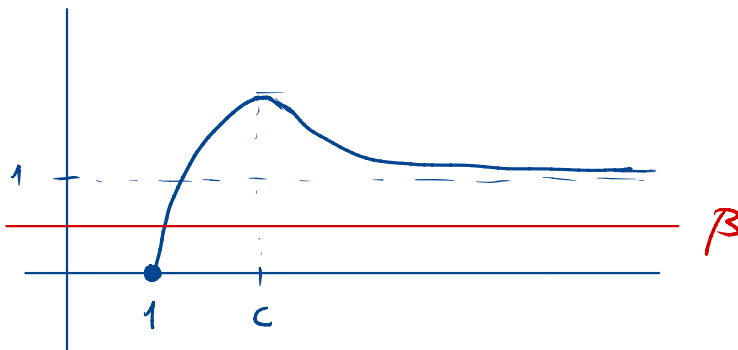
$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^{\frac{1}{x}} = (\infty^0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \log(x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x-1)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x-1}}{1}} = 1. \end{aligned}$$

Podemos ver la gráfica de f : $f(1) = f'(1) = 0$,



d) ¿ $\beta \in \mathbb{R}$ / $f(x) = \beta$ tiene solución única en $[1, +\infty)$?

Sol:



Vemos que si $\beta \in [0, 1]$ o $\beta = f(c)$, la ecuación tiene una única solución.

8

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (x \log x)^2} & x > 0, \\ x + \sqrt{1+x^2} & x \leq 0. \end{cases}$$

a) Continuidad, derivabilidad, acotamiento, extremos, límites en infinito.

b) Probar que $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ tiene exactamente tres soluciones.

Sol:

a) f continua y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Estudiamos en $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + (x \log x)^2} = \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \log x)^2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \sqrt{1+x^2} = 1.$$

Como $f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, f es continua en $x=0$.

Derivabilidad:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1 + (x \log x)^2} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1 - (x \log x)^2}{(1 + (x \log x)^2) x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \cdot \log^2(x) = (0 \cdot \infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log^2(x)}{-1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \log(x) \frac{1}{x}}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \log(x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2/x}{-1/x^2} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1} = 1.$$

Luego f no es derivable en $x = 0$.

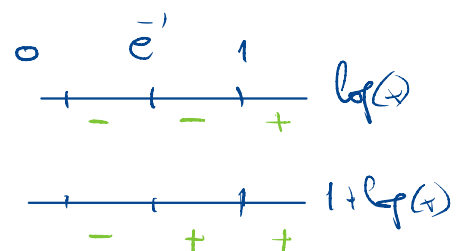
[Es derivable por la izq. y por la derecha, con salto en la derivada].

• Crecimiento: Estudiamos signo de $f'(x)$ para $x \neq 0$.

Si $x > 0$:

$$f'(x) = - \frac{2x \log(x)}{(1 + (x \log x)^2)^2} (\log(x) + 1) \stackrel{(x > 0)}{\Rightarrow}$$

$$f'(x) > 0 \iff \log(x)(\log(x) + 1) < 0$$



Vemos que para $x > 0$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (\bar{e}^{-1}, 1)$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, \bar{e}^{-1}) \cup (1, \infty)$$

Si $x < 0$:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} + x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > -x$$

Como $x < 0$, tenemos que $-x > 0$. Por tanto, como x^2 es creciente en $x > 0$,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1+x^2 > (-x)^2 = x^2 \Leftrightarrow 1 > 0.$$

Luego $f'(x) > 0 \quad \forall x < 0$.

En resumen, f es crec. en $(-\infty, 0) \cup (\bar{e}^{-1}, 1)$

" decrec. en $(0, \bar{e}^{-1}) \cup (1, \infty)$.

De todo lo anterior deducimos que f tiene tres extremos relativos:

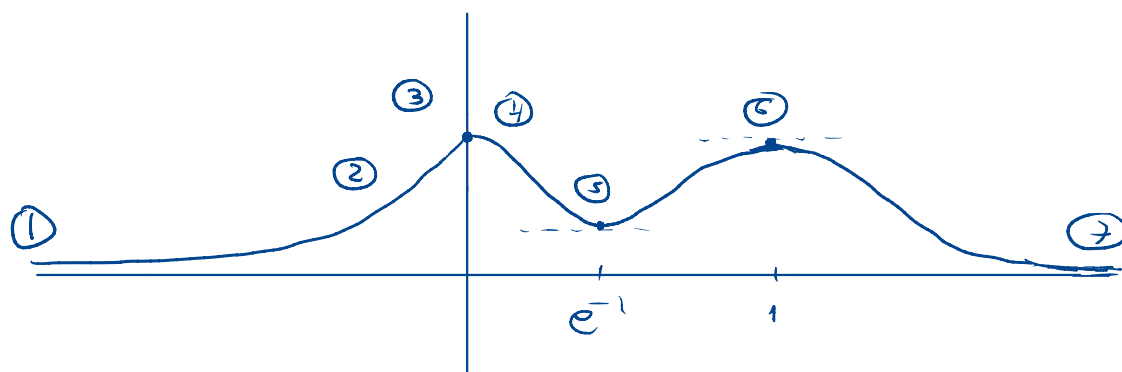
- Máx. relativos en $x=0$, $x=1$. Valor $f(0)=1$
 $f(1)=1$
- Mín. relativo en $x=\bar{e}^{-1}$.

$$\text{Valor } f(\bar{e}^{-1}) = \frac{1}{1+(\frac{1}{e})^2} = \frac{e^2}{e^2+1}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + (\ln x)^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{1+x^2}) = (-\infty + \infty) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 1 + x^2}{-x + \sqrt{1+x^2}} = 0. \end{aligned}$$

En definitiva, tenemos la gráfica de f :



$$\textcircled{1}, \textcircled{7} \leftarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \leftarrow f \text{ crece en } (-\infty, 0), \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1.$$

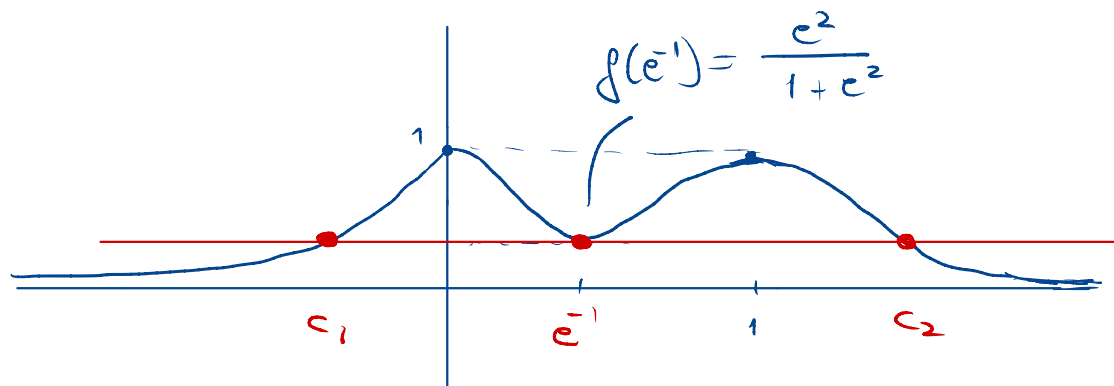
$$\textcircled{4} \leftarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0, f \text{ decrece en } (0, e^{-1})$$

$$\textcircled{5} \leftarrow f'(e^{-1}) = 0, f(e^{-1}) = \frac{e^2}{1+e^2} \quad \left| \begin{array}{l} f \text{ crece en } (e^{-1}, 1) \\ f \text{ decrece en } (e^{-1}, \infty) \end{array} \right.$$

$$\textcircled{6} \leftarrow f(1) = 1 = f(0), f'(1) = 0$$

$$b) f(x) = \frac{e^2}{1+e^2}$$

Lo vemos en la gráfica de $f(x)$:



En efecto, sea $g(x) = f(x) - \frac{e^2}{1+e^2}$. Entonces:

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\exists k_1 > 0 / f(-k_1) < \frac{e^2}{1+e^2}$,

y como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\exists k_2 > 0 / f(k_2) < \frac{e^2}{1+e^2}$.

$$\left. \begin{array}{l} g(-k_1) = f(-k_1) - \frac{e^2}{1+e^2} < 0 \\ g(0) = 1 - \frac{e^2}{1+e^2} > 0 \\ g \text{ continua en } [-k_1, 0] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Teorema de Bolzano} \\ \Rightarrow \exists c \in (-k_1, 0) / g(c) = 0. \end{array}$$

Como $g'(x) > 0$ en $(-\infty, -k_1)$ y $g(-k_1) < 0$, se tiene que $g(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, k_1]$.

Como $g'(x) > 0$ en $(-k, 0)$, en particular $g'(x) \neq 0$,

luego por 1^{a} de Rolle, la raíz $c \in (-k, 0)$ es única.

Argumentos análogos muestran que $\exists c_2 \in (k_2, +\infty) / g(c_2) = 0$, y que no hay más raíces en $(1, +\infty)$.

Por último, $g(\bar{c}') = 0$ por lo que $\bar{c}'$ es otra raíz de g .

Como $g'(x) \neq 0$ en $(0, \bar{c}')$ y en $(\bar{c}', 0)$, no puede haber más raíces en ellos.

Finalmente, como $g(0) \neq 0$, $g(1) \neq 0$, concluimos que g tiene exactamente tres raíces:

$$c_1 \in (-k_1, 0), \bar{c}', c_2 \in (1, k_2).$$