

Clase 24: Polinomios de Taylor

Dada $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ derivable, si f' es a su vez derivable decimos que f es dos veces derivable, y llamamos derivada segunda de f a la derivada de f' .

Igualmente, si f'' es derivable $\leadsto f''' = (f'')' \leadsto$
 $\leadsto f^{(4)}, f^{(5)} \dots, f^{(n)}$
derivada n -ésima.

- Decimos que f es n veces derivable si $f^{(n)}$ existe. Si además $f^{(n)}$ es continua, entonces se dice que f es de clase C^n .

• Lemma: [Fórmula de Leibniz: regla del producto]

Si f, g son n veces derivables, entonces $f \cdot g$ también, y se cumple que

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Dem: Por inducción en n . (ejercicio casa)

$$\begin{aligned} 1) \underline{n=1}: (f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \\ &= \binom{1}{0}f'(x)g(x) + \binom{1}{1}f(x)g'(x) \end{aligned}$$

2) Asumimos que es cierto para n . Probamos entonces para $n+1$:

Objetivo: Probar que

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)}_{\text{Veamos:}}$$

Recordamos que para $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \text{ por tanto}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\equiv \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) = \\ &= f^{(n+1)}(x) g(x) + f(x) g^{(n+1)}(x) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{k=0} g(x) + f(x) g^{(n+1)}(x) + \\
&+ \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) = \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \underbrace{f(x) g^{(n+1)}(x)}_{\tilde{k}=n} + \\
&+ \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} \binom{n}{\tilde{k}+1} f^{(n-\tilde{k})}(x) g^{(\tilde{k}+1)}(x) = \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x).
\end{aligned}$$

• Calculamos ahora ① y veremos que es igual a ②:

$$\textcircled{1} = (f \cdot g)^{(n+1)}(x) = ((f \cdot g)^{(n)})'(x) \stackrel{\text{Hip. Ind.}}{=}$$

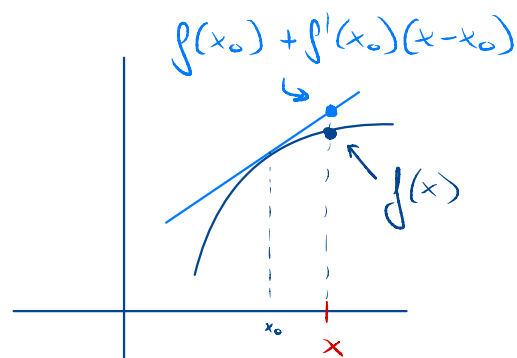
$$= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x)$$

- Pregunta: ¿Cómo podemos calcular el valor numérico de $\sin(1/2)$, e^5 , $\log(7)$, ...?

Hasta ahora, sabemos que dada una función f derivable, podemos aproximar su valor en un punto usando la recta tangente:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Además, sabemos que el error cometido es de menor orden que $|x - x_0|$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x),$$

donde $R(x) = o(x - x_0)$, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Ejemplo: $\sin(1) = 0.84147...$

$$\sin(0.1) = 0.09983...$$

$$\sin(0.01) = 0.0099998...$$

Si aproximamos por su tangente en $x_0 = 0$:

$$\sin(x) \approx \sin(x_0) + \cos(x_0)(x-x_0) = x,$$

(ya sabíamos que para $x \approx 0 \Rightarrow \sin(x) \approx x$).

$$\text{obtenemos } \sin(1) \approx 1 \leftarrow \text{error } 1.6 \cdot 10^{-1}$$

$$\sin(0.1) \approx 0.1 \leftarrow \text{error } 1.7 \cdot 10^{-4}$$

$$\sin(0.01) \approx 0.01 \leftarrow \text{error } 1.7 \cdot 10^{-7}$$

Nota: Vemos que el error es de hecho de menor orden que $x-x_0$.

[mejora como $|x-x_0|^3$ en vez de como $|x-x_0|$].

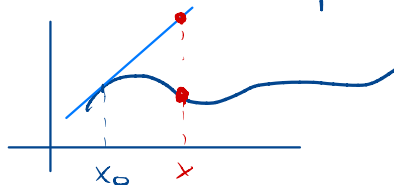
- En resumen, podemos aproximar $f(x)$ por un polinomio de primer grado:

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0),$$

donde los coeficientes son

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0).$$

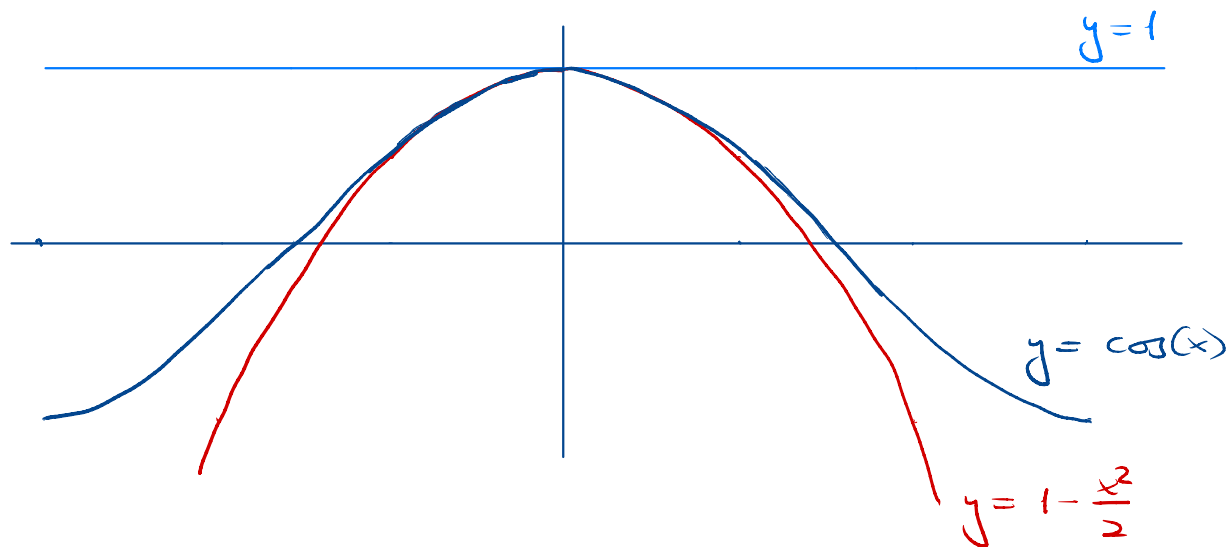
- Sin embargo, si nos alejamos de x_0 la aprox. empeora pronto:



¿Cómo mejoramos la aproximación?

Idea: Usar polinomios de mayor grado.

Ejemplo: $f(x) = \cos(x)$



¿Qué polinomio debemos usar para aproximar $f(x)$ en torno a un punto $x = x_0$?

Para la recta tangente pedimos que tanto la función como la recta valgan lo mismo y tengan la misma pendiente en ese punto:

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\hookrightarrow p_1(x_0) = f(x_0), \quad p_1'(x_0) = f'(x_0).$$

De igual forma, si f es n veces derivable en $x=x_0$, usamos un polinomio de grado n ,

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n,$$

$$\text{tal que } \left. \begin{array}{l} p_n(x_0) = f(x_0) \\ p'_n(x_0) = f'(x_0) \\ \vdots \\ p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{array} \right\} (*)$$

Nota: ¿ $p_n''(x_0), \dots, p_n^{(n)}(x_0)$?

$$\begin{aligned} \rightarrow p'_n(x) &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow p'_n(x_0) = a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow p''_n(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-x_0) + 4 \cdot 3a_4(x-x_0)^2 + \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow p''_n(x_0) = 2a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow p'''_n(x) &= 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x-x_0) + \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow p'''_n(x_0) = 3 \cdot 2a_3 \end{aligned}$$

$\rightarrow \dots$ sucesivamente.

Vemos que (*) se cumple si escogemos los coeficientes $a_1, \dots, a_n$ como sigue:

$$a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0), \quad a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} f'''(x_0),$$

$$a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} f^{(4)}(x_0), \dots \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

• Def: Polinomio de Taylor

Dada f n veces derivable en x_0 , se llama polinomio de Taylor de grado n de f en x_0 al polinomio

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Usando sumatorias: $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$

Notas: 1) Por construcción, $p_n^{(k)}(x_0) = f_n^{(k)}(x_0)$
para $0 \leq k \leq n$.

2) Si $x_0 = 0$, se le llama polinomio de Maclaurin.

- De acuerdo al razonamiento anterior, la aproximación $f(x) \approx p_n(x)$ deberá ser mejor cuanto mayor sea n .

Para $n=1$, sabemos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x) = p_1(x) + R_1(x),$$

$$\text{con } R_1(x) = o(x-x_0), \text{ i.e. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} = 0.$$

- En general:

• Teorema de Taylor:

Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, f n veces derivable.
Entonces, para todo $x \in (a,b)$, se tiene que:

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x), \text{ donde}$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k,$$

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n), \text{ es decir,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Además, $p_n(x)$ es el único polinomio de grado menor o igual que n que verifica lo anterior, es decir, que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Clase 25: Polinomios de Taylor

Resumen: $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{polinomio de Taylor de grado } n \text{ de } f \text{ en } x_0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Resto de Taylor de orden } n}$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Desarrollo o fórmula de Taylor}}$

→ Dado $R_n(x) = f(x) - p_n(x) = o((x - x_0)^n)$.

- Si tenemos más que n derivadas, podemos dar más información sobre el resto:
- Teorema: [Resto de Lagrange]

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $n+1$ veces derivable en (a, b) , y $x_0 \in (a, b)$. Entonces, para todo $x \in (a, b)$,

existe $c_x \in (x, x_0) \cup (x_0, x) /$

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \text{ con}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \equiv \text{Resto de Lagrange.}$$

Desarrollos de McLaurin elementales ($x_0=0$)

Funciones elementales $\rightarrow$ infinitas derivadas.

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = o(x^n).$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k. \end{aligned}$$

$$1) f(x) = e^x$$

$$f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} ,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2) $f(x) = \sin(x)$

$$f'(x) = \cos(x), f''(x) = -\sin(x), f'''(x) = -\cos(x),$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x), f^{(5)}(x) = \cos(x), \dots$$

$$\hookrightarrow f'(0) = 1, f'''(0) = -1, f^{(5)}(0) = 1, \dots$$

$$f(0) = f''(0) = 0 = f^{(4)}(0) = \dots$$

Vemos que $f^{(k)}(0) = (-1)^m$ para $k = 2m+1$,

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{para } k = 2m.$$

Portanto,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

3) $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = -\sin(x), f''(x) = -\cos(x), f'''(x) = \sin(x),$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x), f^{(5)}(x) = -\sin(x), f^{(6)}(x) = -\cos(x), \dots$$

$$f'(0) = 0 = f'''(0) = \dots$$

$$f(0) = 1, f''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 1, f^{(6)}(0) = -1, \dots$$

$$\text{Assi, } f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2m+1 \\ (-1)^m & \text{si } k = 2m \end{cases}$$

Per tale,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$4) f(x) = \log(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}, \dots, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0) = 1, f''(0) = -1, f'''(0) = 2, f^{(4)}(0) = -2 \cdot 3,$$

$$f^{(5)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 4, \dots, f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} (k-1)!$$

Per tale,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} - 2 \cdot 3 \frac{x^4}{4!} + \\ + 2 \cdot 3 \cdot 5 \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n (n-1)! \frac{x^n}{n!} + o(x^{n+1}),$$

esto es,

$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n)} = \\ = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x^k}{k} + o(x^{n+1}).$$

$$s) \int(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f(0)=1, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, f'''(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}, \dots$$

$$\hookrightarrow f(0)=1, f'(0)=1, f''(0)=2, f'''(0)=2 \cdot 3, \dots,$$

$$f^{(k)}(0) = k! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)}$$

• De forma similar, se obtienen muchos otros:

$$c) \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Nota: Si la función $f(x)$ es impar, su polinomio de Taylor solo tiene potencias impares, y análogamente si $f(x)$ es par.

Nota: Si conocemos los polinomios de $f(x)$ y de $g(x)$, podemos calcular los polinomios de $f \cdot g, \frac{f}{g}, f \circ g, f + g, f'$, ...

sin necesidad de hacerlo por la definición. Basta con sustituir los respectivos polinomios y operar con ellos.

Ejercicio: Calcular el desarrollo de Taylor de grado 5 de $\tan(x)$ en $x=0$.

Sol:

• opción 1: Usando la definición $\left[\begin{matrix} \text{siempre} \\ \text{válida} \end{matrix} \right]$

$$f(x) = \tan(x),$$

$$f(0) = 0, f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \dots, f^{(n)}(x) = \dots$$

• Opción 2: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Sabemos que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Dividimos los polinomios:

$$\begin{array}{r} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ - x + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} + \dots \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \hline x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots \end{array}$$

$$\begin{aligned} & x^3 \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) - x^5 \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) + \dots \\ &= x^3 \frac{2}{6} - x^5 \frac{4}{5!} + \dots \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^5}{30} + \dots \\ & - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{30} \right) + \dots \\ &= x^5 \frac{2}{15} + \dots \end{aligned}$$

$$- \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

$$\sigma(x^6)$$

Por tanto,

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6).$$

Clase 26: Polinomios de Taylor

- Ejercicio: Desarrollo de Taylor de $\log(\cos(x-1))$ de grado 4 en $x=1$.

Sol: Sea $f(x) = \log(\cos(x-1))$.

Defino $g(x) = f(x+1) = \log(\cos(x))$.

Vemos entonces que el polinomio de f en $x_0=1$ es igual al polinomio de g en $x_0=0$:

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\downarrow \quad f''(1) \quad f'(1) \quad f''(0)/2!$$

$$f(x) = g(x-1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots$$

Calculamos pues el de $\log(\cos(x))$ en $x_0=0$.

Sabemos que:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Entonces:

≈ 0 para $x \approx 0$

$$\log(\cos(x)) = \log(1 + \cos(x) - 1) =$$

$$= (\cos(x) - 1) - \frac{1}{2}(\cos(x) - 1)^2 + o((\cos(x) - 1)^2) =$$

$$= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4) =$$

$$= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^5)\right) + o(x^4) =$$

$$= -\frac{x^2}{2!} + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4) =$$

$$= -\frac{x^2}{2!} - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4).$$

Finalmente,

$$f(x) = \log(\cos(x-1)) =$$

$$= -\frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-1)^4}{12} + o((x-1)^4)$$

• Ejercicio: Polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado 4 en $x_0 = 0$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{1 + \sin(x) - x} - e^{-x^2}.$$

Sol: Denotemos

$$f_1(x) = \sqrt{1+x}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_3(x) = -\sin(x) + x,$$

$$f_4(x) = e^{-x^2}.$$

Vemos que $f(x) = f_1(x) f_2(x) f_3(x) - f_4(x)$.

Calculamos usando los desarrollos de f_1, f_2, f_3, f_4 :

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f_1''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \quad f_1'''(x) = \frac{3}{2^3}(1+x)^{-5/2},$$

$$f_1^{(4)}(x) = -\frac{3 \cdot 5}{2^4}(1+x)^{-7/2}, \dots$$

$$\hookrightarrow f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = \frac{1}{2}, \quad f_1''(0) = -\frac{1}{4}, \quad f_1'''(0) = \frac{3}{8},$$

$$f_1^{(4)}(0) = -\frac{3 \cdot 5}{2^4}, \dots$$

$$f_1(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{3}{8 \cdot 3!} x^3 - \frac{3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} x^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4),$$

$$f_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4),$$

$$f_3(x) = \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$f_4(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^5),$$

Per tanto,

$$\begin{aligned} f_2(f_3(x)) &= 1 + f_3(x) + (f_3(x))^2 + o(x^4) = \\ &= 1 + \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \end{aligned}$$

$$f_1(x) f_2(f_3(x)) =$$

$$= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)\right) \left(1 + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + o(x^4) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{11}{48}x^3 + \left(\frac{1}{12} - \frac{5}{128}\right)x^4 + o(x^4).$$

Finalmente,

$$= \frac{2^5 - 3 \cdot 5}{3 \cdot 2^7} = \frac{17}{384}$$

$$f(x) = f_1(x) f_2(f_3(x)) - f_4(x) =$$

$$= \frac{x}{2} - \left(\frac{1}{8} - 1\right)x^2 + \frac{11}{48}x^3 + \left(\frac{17}{384} - \frac{1}{2}\right)x^4 + o(x^4),$$

• Ejercicios: 11, g), e)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin(x) - x|}{|x|^p}, \quad p > 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin(x) - x|}{|x|^p} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left| x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x \right|}{|x|^p} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3 / 3!}{|x|^p} = \frac{1}{3!} \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{3-p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 3, \\ \frac{1}{6} & \text{si } p = 3, \\ +\infty & \text{si } p > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

(Clase 27): Extremos relativos, convexidad.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} + x \cdot \sin(x) - 1}{(e^x - 1 - x)^2} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4) + x - \frac{x^4}{3!} + o(x^5) - 1}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) - 1 - x \right)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) x^4 + o(x^4)}{\frac{x^4}{4} + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} x^4 + o(x^4)}{x^4 / 4} = \frac{4}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin(x) - e^x}{(\arctan(x))^2} &= \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x^2) - \cancel{1} - \cancel{x} - \frac{x^2}{2} - o(x^2)}{(x + o(x^2))^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 (1 + o(x))^2} = -\frac{1}{2} //
 \end{aligned}$$

• Teorema: [Condición suficiente de extremo relativo]

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n veces derivable y $c \in (a, b)$.

Si $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$,

y $f^{(n)}(c) \neq 0$, entonces:

1) Si n es par, f tiene extremo relativo en c ,

• si $f^{(n)}(c) > 0 \rightarrow$ mínimo relativo.

• si $f^{(n)}(c) < 0 \rightarrow$ máximo relativo.

2) Si n impar, f no tiene extremo relativo en c .

→ ¿Por qué? (Idea de la demostración)

Veamos primero con $n=2$: $f'(c)=0$, $f''(c) \neq 0$.

Entonces, desarrollo de Taylor de orden $n=2$

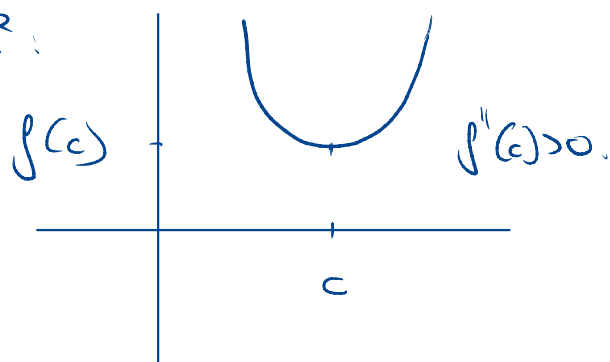
en $x_0 = c$:

$$f(x) = f(c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + o((x-c)^2)$$

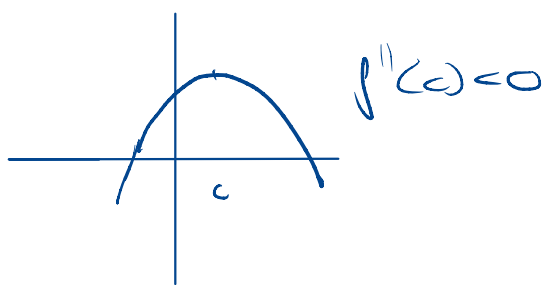
Extremo relativo $\leadsto$ Solo importa un entorno local de c .

Así, $o((x-c)^2)$ es despreciable frente a $\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2$.

Si $f''(c) > 0$, parábola tipo x^2 :



y si $f''(c) < 0$, tipo $-x^2$,



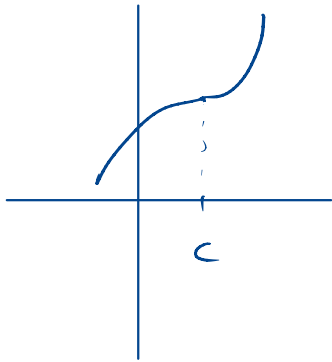
En general, si n par:

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + o((x-c)^n).$$

↑
par

↳ Función tipo $A + Bx^n$ (pico centrado en c).

Si n impar, $f(x) = f(c) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + o((x-c)^n)$



n impar $\rightarrow$ distinto signo a la
izq. y derecha de c .

• Convexidad y concavidad

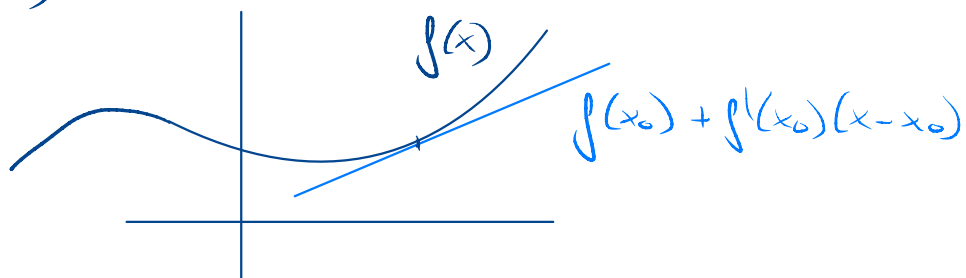
• Def: [Convexidad local]

Dada $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in (a, b)$,
se dice que:

1) f es convexa en x_0 si en un entorno de x_0 es

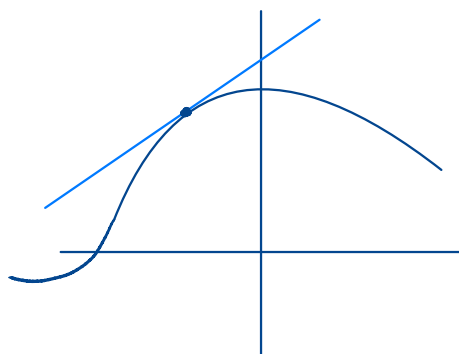
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Esto es, la recta tangente queda por debajo de
la función,



2) f es cóncava en x_0 si en un entorno de x_0 es

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

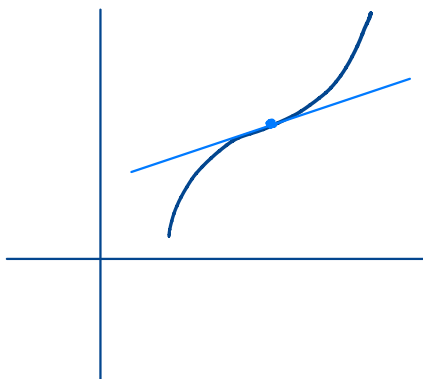
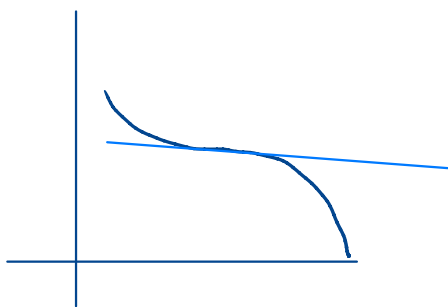


3) x_0 es un punto de inflexión de f si

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ para } x < x_0$$

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ para } x > x_0,$$

o al revés.



Nota: Puede no darse ninguno de los tres casos, por ejemplo,

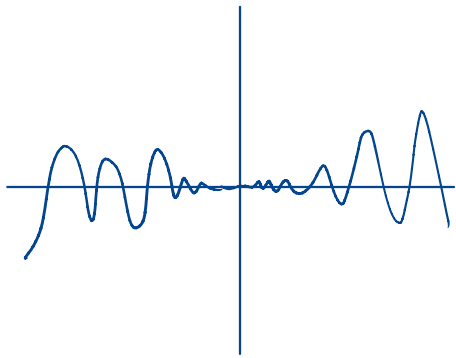
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{en } x \neq 0. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Es continua pues $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

y también es derivable en $x=0$ pues

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

Por tanto, recta tangente en $x=0$: $y=0$



No hay un entorno de $x=0$ donde $f(x)$ quede por arriba o por abajo de $y=0$.

→ Observamos que en este ejemplo f es derivable en $\mathbb{R}$, pero su derivada no es continua en $x=0$:

$$\begin{aligned} \text{Para } x \neq 0, \quad f'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \nexists.$$

• Teorema: [Condición suficiente de concavidad local]

Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ n veces derivable y $x_0 \in (a, b)$.

Si $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, entonces:

1) Si n par y $\left| \begin{array}{l} f^{(n)}(x_0) > 0 \rightarrow f \text{ es cóncava en } x_0. \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \rightarrow f \text{ es cóncava en } x_0 \end{array} \right.$

2) Si n impar, f tiene un punto de inflexión en x_0 .

→ Idea de la prueba:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

$$\hookrightarrow f(x) - \underbrace{(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0))}_{\text{recta tangente}} \approx \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

• Ejercicio: PG

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x$$

- a) Crecimiento, extremos relativos y absoluto.
- b) Convexidad.
- c) Valores de $a \in \mathbb{R}$ / $f(x) = a$ tiene exact. dos sol.

Sol:

a) $f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = e^x(x^2 + 2x - 3)$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = -1 \pm 2 \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = 1.$$

f derivable en $\mathbb{R}$.

En resumen: f creciente en $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$
decreciente en $(-3, 1)$

máx. relativo en $x = -3$, $f(-3) = 6e^{-3}$

mín. relativo en $x = 1$, $f(1) = -2e$

No tiene máximo absoluto pues $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

¿Mín. absoluto?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3)e^x = 0, \quad f(1) = -2e,$$

Por tanto, $x = 1$ es mín. absoluto.

$$\begin{aligned} b) \quad f''(x) &= (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x - 3)e^x = \\ &= e^x(x^2 + 4x - 1). \end{aligned}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 > 0$$

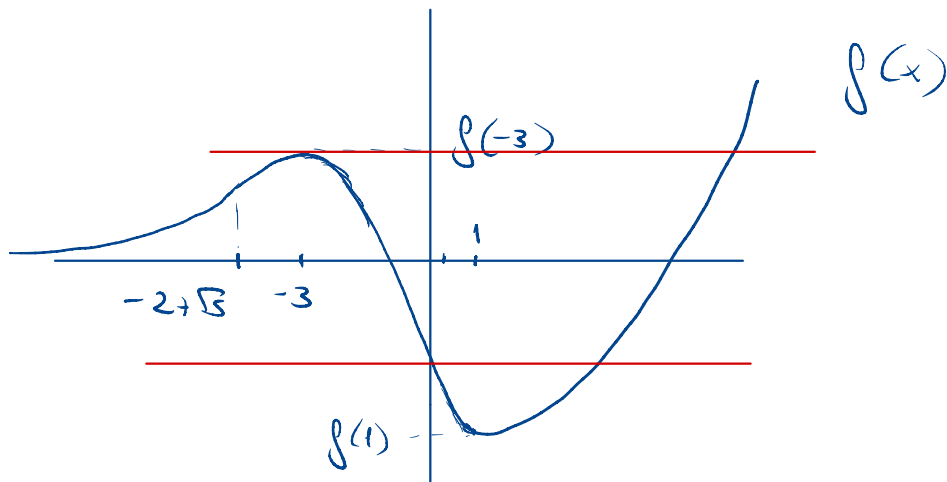
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x + 2 + \sqrt{5})(x + 2 - \sqrt{5}) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2 - \sqrt{5}) \cup (-2 + \sqrt{5}, \infty)$$

Así, f convexa en $(-\infty, -2-\sqrt{5}) \cup (2+\sqrt{5}, \infty)$,
 cóncava en $(-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5})$,
 puntos de inflexión en $-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}$.

c) Gráfica de $f(x)$:



Vemos que $f(x) = a$ tiene exactamente dos
 soluciones $\Leftrightarrow a \in (f(1), 0) \cup \{f(-3)\}$.