

P 41

a) Probar que $\sin(x) - x \cos(x) = 0$ tiene una única solución en $(0, 2\pi]$.

Sol: Sea $g(x) = \sin(x) - x \cos(x)$, que es continuo y derivable en $\mathbb{R}$.

Calculamos: $g(0) = 0$, $g(2\pi) = -2\pi$.

Necesitamos más información:

$$g'(x) = \cos(x) - \cos(x) + x \cdot \sin(x) = x \cdot \sin(x).$$

Vemos que, en $(0, 2\pi]$, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \sin(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \pi)$.

Como $g(0) = 0$ y $g'(x) > 0$ en $(0, \pi)$, por T^{te} de Rolle sabemos que g no tiene raíces en $(0, \pi)$.

Finalmente,

$$\left. \begin{array}{l} g(\pi) = \pi > 0 \\ g(2\pi) = -2\pi < 0 \\ g \text{ continua en } [\pi, 2\pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (\pi, 2\pi) / g(c) = 0.$$

Como $g'(x) \neq 0$ en $(\pi, 2\pi)$, $x=c$ es la única raíz de g en $(\pi, 2\pi)$.

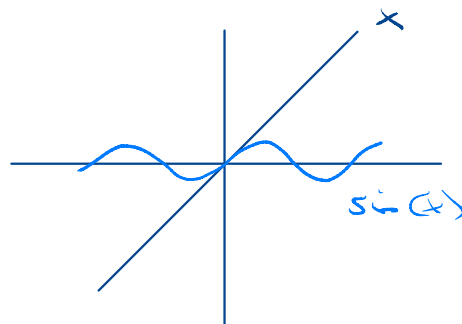
En conclusión, hemos probado que $x=c$ es la única solución de $\sin(x) - x \cos(x) = 0$ en $(0, 2\pi]$.

b) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{\sin(x)}{x}}$. ¿Dom(f)?
¿ $f(0)$ / f continua en $\mathbb{R}$?

sol.

$$\text{Dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0, 1 - \frac{\sin(x)}{x} \geq 0 \right\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

pues $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$:



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - \frac{\sin(x)}{x}} = \sqrt{1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}} = 0.$$

Por tanto, definiremos $f(0)=0$ y así f queda definida como función continua en $\mathbb{R}$.

c) Derivabilidad.

Como $\sqrt{x}$ derivable para $x > 0$ y $\frac{\sin(x)}{x}$ derivable

en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, vemos que f es derivable en

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, 1 - \frac{\sin(x)}{x} > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Estudiamos en $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \frac{\sin(x)}{x}}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x - \sin(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3/3!}{x}} =$$

$$\left(\begin{aligned} x - \sin(x) &= x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) = \\ &= \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \end{aligned} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2}{6}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{6x}.$$

Por tanto, f no es derivable en $x=0$. Es derivable por la derecha y por la izq., y la derivada tiene una discontinuidad de tipo salto con salto igual a $2 \cdot \frac{1}{6} = 1/3$.

d) Estudie intervalos de crecimiento y extremos absolutos de f en $[0, 2\pi]$.

Sol:

En $[0, 2\pi]$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(- \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2} \right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) - x \cdot \cos(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, c),$$

$$\text{y } f'(x) < 0 \text{ en } x \in (c, 2\pi).$$

Así,

	f creciente en $(0, c)$ f decreciente en $(c, 2\pi)$ extremo relativo en $x = c$
--	--

Puntos críticos en $[0, 2\pi]$: $x_1 = 0$, $x_2 = 2\pi$, $x_3 = c$

$$f(0) = 0, \quad f(c) = \sqrt{1 - \frac{\sin(c)}{c}}, \quad f(2\pi) = 1$$

Por a), sabemos que $c \in (\pi, 2\pi)$, luego

$$\sin(c) < 0 \text{ y } 1 - \frac{\sin(c)}{c} > 1, \text{ luego } f(c) > 1.$$

Por tanto
mínimo absoluto en $x = 0$.
máximo absoluto en $x = c$.

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{\sin(x)}{x}} = 1, \text{ pues}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \text{ al ser } |\sin(x)| \leq 1.$$

P48

a) Desarrollo de Taylor de orden 6 de $\sin(x^2)$ y $\sin^2(x)$.

Se

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^8),$$

$$\begin{aligned}\sin^2(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) = \\ &= x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + \frac{2}{5!}x^6 + \frac{x^6}{3!^2} + o(x^7).\end{aligned}$$

b) $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - \sin^2(x)}{x^n}$

$$\begin{aligned}\sin(x^2) - \sin^2(x) &= \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + o(x^7)\right) = \\ &= \frac{x^4}{3} - \frac{19}{90}x^6 + o(x^7).\end{aligned}$$

$$\text{Así, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - \sin^2(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{3} - \frac{19}{90}x^6 + o(x^7)}{x^n} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4/3}{x^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 4 \\ 1/3 & \text{si } n = 4 \\ \infty & \text{si } n > 4 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \frac{\sin(x^2) - \sin^2(x)}{x^n}, \quad x \neq 0.$$

Por apl. b),

1) Si $n < 4$, con $f(0) = 0$, f es continua en $x=0$.

2) Si $n = 4$, con $f(0) = \frac{1}{3}$, f es continua en $x=0$.

3) Si $n > 4$, f es discontinua en $x=0$.

d) 1) $n < 4$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - \sin^2(x)}{x^{n+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4/3}{x^{n+1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n+1 < 4 \\ 1/3 & \text{si } n+1 = 4 \\ \infty & \text{si } n+1 > 4. \end{cases} \end{aligned}$$

f derivable en $x=0$ si $n \leq 3$.

2) $n = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{1}{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x^2) - \sin^2(x)}{x^4} - \frac{1}{3}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\frac{x^4}{3} - \frac{19}{90}x^6}{x^4} - \frac{1}{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{19}{90}x^2}{x} = 0,$$

luego f derivable en $x=0$ si $n=4$.

Ejercicios: P51, P49, P27

P27 Demostrar que

$$\frac{1}{\cos^2(a)} \leq \frac{\tan(b) - \tan(a)}{b - a} \leq \frac{1}{\cos^2(b)}, \quad 0 < a < b < \frac{\pi}{2}.$$

Sol: Como $f(x) = \tan(x)$ es continua y derivable en $(0, \frac{\pi}{2})$, por el TMR $\exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) /$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

$$\text{Esto es, } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = \frac{1}{\cos^2(c)}.$$

Ahora, en $(0, \frac{\pi}{2})$, $\cos(x) > 0$ y es decreciente:

$$(\cos(x))' = -\sin(x) < 0 \quad \text{si } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Por tanto,

$$\cos^2(a) \geq \cos^2(c) \geq \cos^2(b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(a)} \leq \underbrace{\frac{1}{\cos^2(c)}}_{= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}} \leq \frac{1}{\cos^2(b)} \quad /$$

P51 $y = y(x), y(0) = 0, x \cdot e^y = y \cdot e^x.$

$$¿ y'(0), y''(0)? \quad ¿ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x^2} ?$$

Sl: $x \cdot e^{y(x)} = y(x) \cdot e^x \Rightarrow$

$$\rightarrow e^{y(x)} + x \cdot e^{y(x)} \cdot y'(x) = y'(x) e^x + y(x) e^x (*)$$

En $x=0$: $1 = y'(0).$

Derivamos de nuevo (*):

$$\begin{aligned} e^{y(x)} y'(x) + e^{y(x)} y'(x) + x e^{y(x)} (y'(x))^2 + x e^{y(x)} y''(x) &= \\ = y''(x) e^x + y'(x) e^x + y'(x) e^x + y(x) e^x &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{En } x=0: 1+1 = y''(0) + 1+1 \Rightarrow y''(0) = 0.$$

$$\text{Por } +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x)}{2x} = \infty.$$

• Ejercicio: [P1 enero 2023]

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x^2-1}} & x > 0, \\ \arctan\left(\frac{x}{x^2+1}\right) & x \leq 0. \end{cases}$$

a) $\text{Dom}(f)$? Extiende f de forma continua en $x=1$.

¿Continuidad y derivabilidad de f extendida?

Halla su derivada.

b) Asíntotas.

c) Sea $g(x) = x^2 - 1 - 2x^2 \log(x)$. Prueba que tiene una única raíz en $x=1$ y que $g(x) \leq 0$ para $x > 0$.

d) Crec. y decrec. de f , extremos relativos y absolutos, esboza la gráfica de f .

Sol:

$$a) x^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x^2-1}}} = e^{\frac{\ln x}{x^2-1}},$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln(x)}{x^2-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{2x}} = \sqrt{e}.$$

Definimos pues $f(1) = \sqrt{e}$.

• Continuidad

$$\underline{x=0}$$

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x^2-1}} = +\infty.$$

Luego f es discontinua en $x=0$.

continua por la izq. en $x=0$.

continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• Derivabilidad

$x=0$: No derivable (pues no es continua)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{arctan}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}{x} = 1,$$

luego f derivable por la izq. en $x=0$.

$$\underline{x=1:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x^2-1}} - \sqrt{e}}{x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right).$$

Desarrollamos $e^{\frac{\ln(x)}{x^2-1}}$ en $x=1$:

$$\ln(x) = \ln(1 + x - 1) = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + o((x - 1)^2) \Rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{1}{x + 1} - \frac{x - 1}{2(x + 1)} + o((x - 1)) \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 1) + o((x - 1))$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 1) - \frac{x - 1}{4} + o(x - 1)$$

Finalmente,

$$e^{\frac{\ln(x)}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{2} - \frac{x-1}{2} + o(x-1)} = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x-1}{2} + o(x-1)} =$$

$$= \sqrt{e} \cdot \left(1 - \frac{x-1}{2} + o(x-1) \right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x^2-1}} - \sqrt{e}}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{\sqrt{e}} - \frac{\sqrt{e}}{2}(x-1) + o(x-1) - \cancel{\sqrt{e}}}{x - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{e}}{2} \frac{x-1}{x-1} = -\frac{\sqrt{e}}{2},
 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en $x=1$.

Par suite, f dérivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dérivée:

• Si $x > 0$ y $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{\ln(x)}{x^2-1}} \right) = e^{\frac{\ln(x)}{x^2-1}} \cdot \frac{\frac{x^2-1}{x} - 2x \ln(x)}{(x^2-1)^2}$$

$$\bullet f'(1) = -\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Si } x < 0: f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2} \cdot \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\
 &= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2 + x^2}.
 \end{aligned}$$

b) En $x=0$, asíntota vertical ($\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$).

No hay más asíntotas verticales pues f continuo en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Asíntota horizontal $y=0$ en $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x^2-1}} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Asíntota horizontal $y=1$ en $x \rightarrow +\infty$.

Puesto que tiene asíntotas horizontal en $\pm\infty$, no puede tener asíntotas oblicuas.

c) $g(1) = 0$

$$g'(x) = 2x - 4x \cdot \log(x) - 2x = -4x \cdot \log(x)$$

$$\text{Entonces, } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g'(x) < 0 \text{ para } x > 1.$$

g continua y derivable en $(0, +\infty)$.

Como $g(1) = 0$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq 1$,
por T^a de Rolle la solución es única.

Además,

$g'(x) > 0$ en $x \in (0, 1) \Rightarrow g$ creciente en $(0, 1)$

$g'(x) < 0$ en $x \in (1, \infty) \Rightarrow g$ decreciente en $(1, \infty)$,

y como $g(1) = 0 \Rightarrow g(x) \leq 0$ para $x > 0$.

d) Estudiamos signo de $f'(x)$:

$$\underline{x < 0}: f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2 + x^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 > x^2 \Leftrightarrow x \in (-1, 0)$$

Así, f creciente en $(-1, 0)$
decreciente en $(-\infty, -1)$
mínimo relativo en $x = -1$ }

$$\underline{x > 0:} \quad \begin{matrix} \ln(x) \\ x^2 - 1 \end{matrix} \quad f'(x) = e^{\frac{x^2-1}{x(x^2-1)^2}} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\uparrow \\ f'(1) = -\frac{e}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 - 2x^2 \ln(x) > 0$$

Por apt. c), sabemos que $x^2 - 1 - 2x^2 \ln(x) < 0$ para $x > 0$.
($x \neq 1$)

Además, $f'(1) < 0$, por tanto,

$\parallel f$ decrece en $(0, +\infty)$.

• f no tiene máx. absoluto pues $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

• Mínimo absoluto en $x = -1$ con valor

$$f(-1) = -\operatorname{arctan}(1/2) < 0,$$

pues $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$.

