

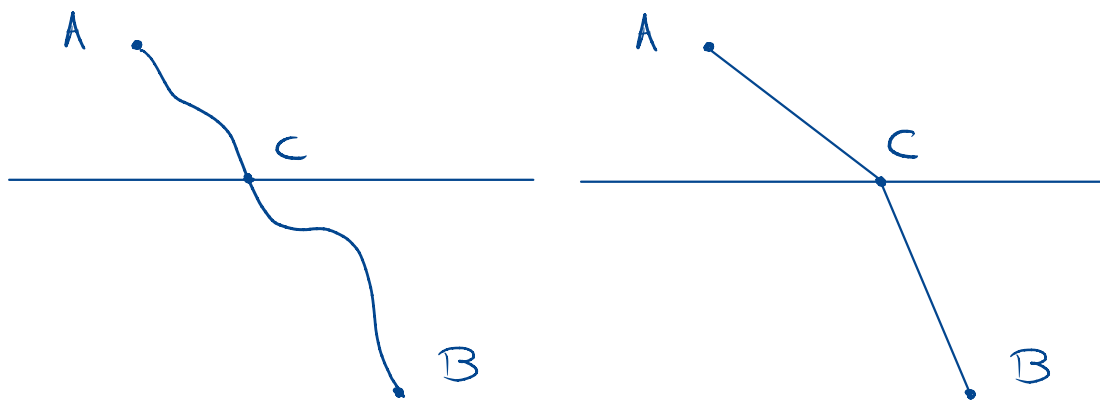
Clase 31, 32 : Prueba intermedia Parcial 1.

Clase 33 : Optimización.

P57

Velocidad luz $\begin{cases} \text{aire: } c \\ \text{agua: } v < c. \end{cases}$

→ Datos : Puntos A y B.

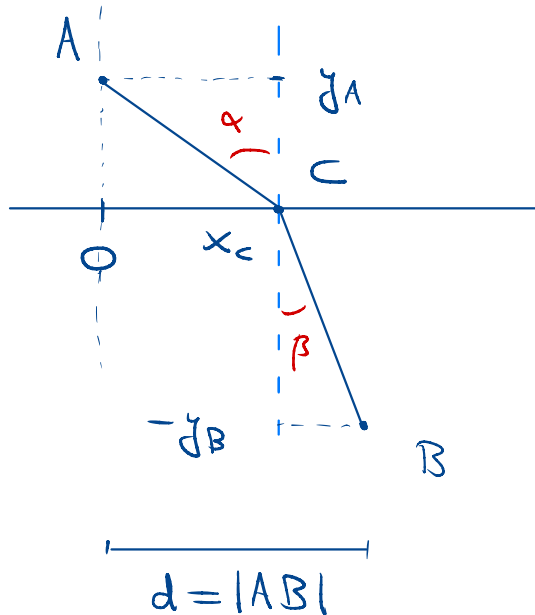


→ Modelo : La luz viaja de A a B por el camino que minimiza el tiempo empleado. [Principio de Fermat]
Entonces :

- 1) De A a C : velocidad constante $c \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ camino más corto es una recta.
- 2) De C a B : " "

Por tanto, la única incógnita es determinar el punto C para que el tiempo sea mínimo.

Esguena: Situamos el punto A con $x_A = 0$,



aire • Los valores de y_A, y_B, d son datos del problema.

agua.

↓
Incógnitas:
 d, α, β, x_C ?

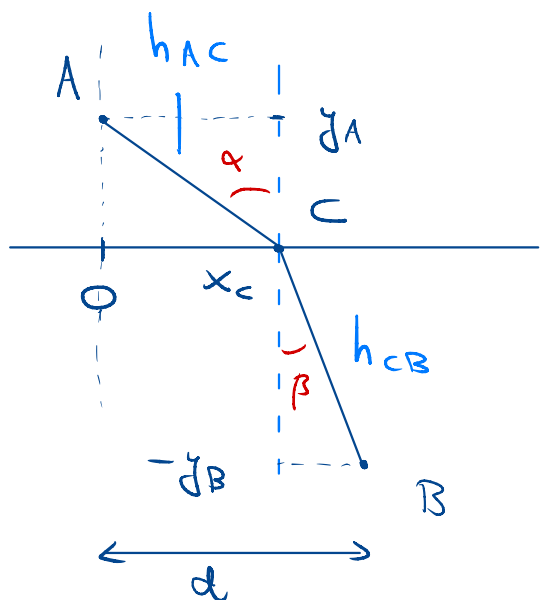
- Tiempo en recorrer $A \rightarrow C$ y $C \rightarrow B$

$$\begin{cases} T_{AC} = h_{AC}/c, \\ T_{CB} = h_{CB}/v. \end{cases}$$

Tiempo total: $T = T_{AC} + T_{CB} = \frac{h_{AC}}{c} + \frac{h_{CB}}{v}$.

Calculamos h_{AC}, h_{CB} en función de los datos y_A, y_B, d y de la incógnita x_C .

Por el Teorema de Pitágoras,



$$h_{AC}^2 = y_A^2 + x_c^2$$

$$h_{CB}^2 = y_B^2 + (d - x_c)^2$$

Luego tenemos el tiempo total como función de x_c :

$$T(x_c) = \frac{1}{c} \sqrt{y_A^2 + x_c^2} + \frac{1}{v} \sqrt{y_B^2 + (d - x_c)^2}.$$

↪ Aquí, y_A, y_B, d, c, v son datos,
y x_c es la variable. ("números")

|| Nos piden calcular el mínimo de $T(x_c)$
con $x_c \in [0, d]$.

Puntos críticos: 1) $T(0), T(d)$

2) Donde T' se anule.

(3) Donde T no sea derivable.)

↗ T derivable en $(0, d)$.

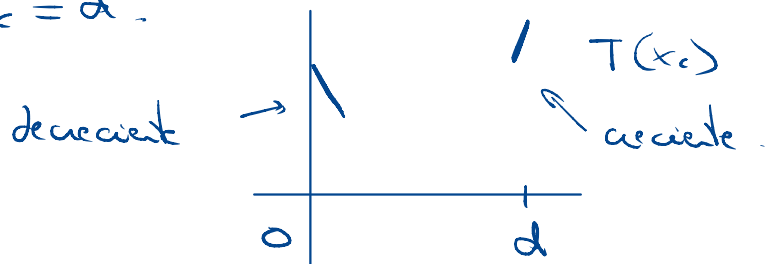
Calculamos $T'(x_c)$:

$$T'(x_c) = \frac{1}{c} \frac{x_c}{\sqrt{y_A^2 + x_c^2}} + \frac{1}{v} \frac{-(d-x_c)}{\sqrt{y_B^2 + (d-x_c)^2}}.$$

$$\text{Vemos que } \lim_{x_c \rightarrow 0^+} T'(x_c) = \frac{-d/v}{\sqrt{y_B^2 + d^2}} < 0, \text{ y}$$

$$\lim_{x_c \rightarrow d^-} T'(x_c) = \frac{d/c}{\sqrt{y_A^2 + d^2}} > 0,$$

luego $T(x_c)$ no puede tener mínimos en $x_c = 0$ o $x_c = d$.



Por tanto, el mínimo absoluto ha de alcanzarse en el mínimo relativo donde $T'(x_c) = 0$.

Lo calculamos:

$$T'(x_c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c} \frac{x_c}{\sqrt{y_A^2 + x_c^2}} = \frac{1}{v} \frac{(d-x_c)}{\sqrt{y_B^2 + (d-x_c)^2}} \Leftrightarrow$$

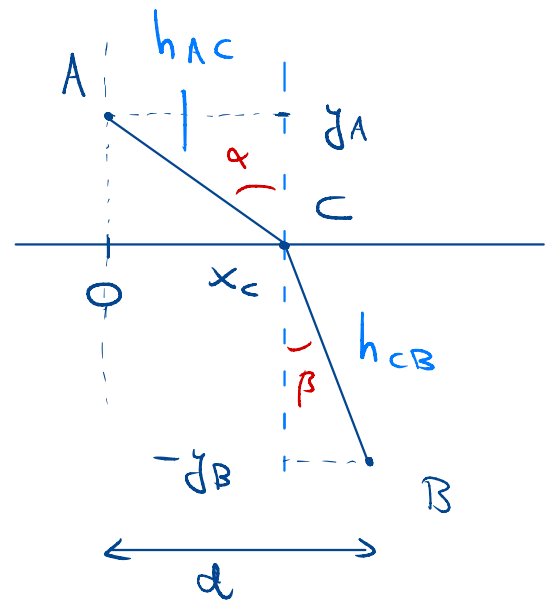
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{x_c}{\sqrt{y_A^2 + x_c^2}}}{(d-x_c)} = \frac{c}{v}$$

$$\frac{x_c}{\sqrt{y_B^2 + (d-x_c)^2}}$$

→ Vemos que:

$$\frac{(d-x_c)}{\sqrt{y_B^2 + (d-x_c)^2}} = \sin(\beta),$$

$$\frac{x_c}{\sqrt{y_A^2 + x_c^2}} = \sin(\alpha).$$

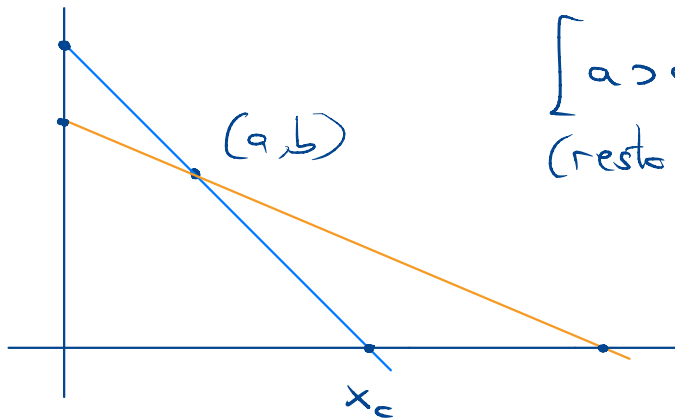


Es decir, hemos deducido la ley de Snell, esto es, la trayectoria que requiere menos tiempo cumple que

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c}{v} //$$

- 1) Segmento mínimo entre todos los que pasan por el punto (a, b) y estén limitados por los ejes.

Sol:



$[a > 0, b > 0 \rightarrow x_c > 0]$
(resto de casos análogos).

El segmento queda definido dada la abscisa de corte con el eje horizontal, x_c . En efecto:

$$\left. \begin{array}{l} y = mx + n \\ b = m \cdot a + n \\ 0 = m \cdot x_c + n \end{array} \right\} \Rightarrow b = m(a - x_c) \Rightarrow m = \frac{b}{a - x_c}$$

$$\Rightarrow n = b - m \cdot a = b - \frac{b \cdot a}{a - x_c} = b \frac{-x_c}{a - x_c}$$

$$\text{Recta } y = \frac{b}{a - x_c} x - \frac{bx_c}{a - x_c}$$

Longitud segmento: Por Pitágoras,

$$L^2 = x_c^2 + \left(\frac{b x_c}{a - x_c} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(x_c) = x_c \sqrt{1 + \frac{b^2}{(a - x_c)^2}} = \sqrt{x_c^2 + \frac{b^2 x_c^2}{(a - x_c)^2}}$$

Por tanto, tenemos que calcular el mínimo (*) absoluto de $L(x_c)$ en $x_c \in (a, +\infty)$.

Como $L(x_c)$ derivable en $(a, +\infty)$, estudiemos donde $L'(x_c) = 0$:

$$L'(x_c) = \frac{x_c + \frac{b^2 x_c (a - x_c)^2 + b^2 x_c^2 (a - x_c)}{(a - x_c)^4}}{\sqrt{x_c^2 + \frac{b^2 x_c^2}{(a - x_c)^2}}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_c (a - x_c)^4 + b^2 x_c (a - x_c)^2 + b^2 x_c^2 (a - x_c)}{(a - x_c)^4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - x_c)^3 + b^2 (a - x_c) + b^2 x_c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - x_c)^3 + ab^2 - \cancel{x_c b^2} + \cancel{x_c b^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - x_c = \sqrt[3]{-ab^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_c = a + \sqrt[3]{ab^2},$$

↑ Nota: (*) Como $L(x_c) \neq 0$, el punto donde se alcanza de $L(x_c)$ es el mismo que donde se alcanza el mínimo de $(L(x_c))^2$, pues

$$\frac{d}{dx} (L(x_c))^2 = 2 L(x_c) L'(x_c) = 0 \Leftrightarrow L'(x_c) = 0.$$

En ocasiones como esta, es más fácil obtener tal mínimo derivando $(L(x_c))^2$:

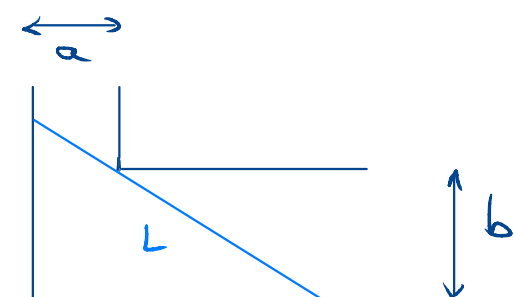
$$(L(x_c))^2 = x_c^2 + \frac{(x_c b)^2}{(a-x_c)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} (L(x_c))^2 = 2x_c + \frac{2x_c b^2 (a-x_c)^2 + (x_c b)^2 2(a-x_c)}{(a-x_c)^4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-x_c)^3 + b^2(a-x_c) + b^2 x_c = 0 \dots$$

2) Longitud máxima que puede tener una viga para que pueda pasar horizontalmente de una calle de anchura a a otra perpendicular de anchura b .

Sol:



Vemos que el óptimo coincide con el del apartado D:

$$L(x_c) = x_c \sqrt{1 + \frac{b^2}{(a-x_c)^2}} \quad \text{con}$$

$$x_c = a + \sqrt[3]{ab^2}.$$

luego longitud máxima es

$$L_{\max} = \left(a + \sqrt[3]{ab^2}\right) \sqrt{1 + \frac{b^2}{(ab^{2/3})^2}} =$$

$$= \left(a + a^{1/3} b^{2/3}\right) \sqrt{\frac{a^{2/3} b^{4/3} + b^2}{a^{2/3} b^{4/3}}} =$$

$$= \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right) \sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}} = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}.$$