

Clase 43: Integrales impropias

Integral impropia de 1ª especie: $\int_a^{+\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^a f(x) dx$

$$\hookrightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

→ Si límite existe y finito: "convergente".

Ej: $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^p} dx$ $\begin{cases} \text{diverge si } p \leq 1 \\ \text{converge si } p > 1. \end{cases}$

¿Converge/diverge?

→ Integrar y calcular el límite.

→ Usar criterios de convergencia.

Criterios de convergencia

$$1) \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Converge} \\ \text{absolutamente} \end{array} \Rightarrow \text{Converge} \right]$$

Ej: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$, $\int_{-\infty}^0 e^x \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

- Veremos ahora criterios para funciones positivas.

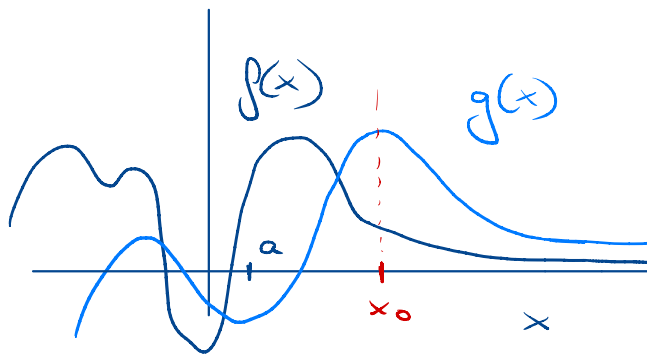
2) Criterio de comparación:

Sean $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \underline{[0, +\infty)}$ integrables en $[a, b]$ $\forall b > a$.

Si $\exists x_0 \geq a$ / $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq x_0$, entonces

1) $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ convergente,

2) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ divergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx$ divergente.



• Ejemplos:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx$

Como $\frac{x}{1+x^3} \leq \frac{x}{x^3} \leq \frac{1}{x^2}$ en $[1, +\infty)$ y

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, entonces $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx$ también.

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx}_{\text{"número"}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx}_{\text{converge (como a)}}.$$

$$c) \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

Como $x \geq 1 \rightarrow 1+x^2 \leq x^2+x^2=2x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{2x^2} \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{x},$$

y sabemos que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge, concluimos

que $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ también.

$$d) \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \quad \text{No nos sirve el criterio!}$$

3) Criterio de comparación en el límite:

Sean $f, g: [a, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$ tales que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in [0, +\infty].$$

Entonces:

• Si $L \in (0, L)$: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ y $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ tienen el mismo carácter.

• Si $L = 0$: $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

• Si $L = +\infty$: $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Notas: • Análogo para $\int_{-\infty}^a f(x)dx$

• Se hace falta que f, g sean positivas a partir de un valor (lo mismo para negativas).

↗ Il criterio no vale si el signo cambia indefinidamente.

• Ejempl: $\int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{2+x^5} dx$ es convergente, pues

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1+x^2}{2+x^5}}{\frac{1}{x^3}} = 1 \in (0, +\infty), \text{ y } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \text{ lo es.}$$

• Def: Se dice que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ es convergente si

ambas $\int_{-\infty}^a f(x) dx$, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ lo son. En ese caso,

$$\text{su valor es } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

En general, se define el valor principal (de Cauchy) de f como

$$pv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b f(x) dx.$$

Nota: Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ es convergente, entonces coincide con su valor principal.

Pero puede existir el valor principal aun siendo la integral divergente.

Ej: $\int_{-\infty}^{\infty} x \, dx$ es divergente pues $\int_0^{+\infty} x \, dx$ lo es,

pues $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = 0.$

→ Pasamos a ver integrales donde la función es no acotada en un intervalo acotado.

• Def: Integral impropia de 2ª especie

Dada $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, m]$ para todo $m < b$, se define la int. imp. de 2ª esp. de f en $[a, b)$ como

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{m \rightarrow b^-} \int_a^m f(x) \, dx.$$

Si el límite existe y es finito, se dice convergente. En caso contrario, divergente.

Nota: Se define análogamente el caso $\int_a^b f(x) \, dx$ con

singularidad en $x = a$. En general, si

f es no acotada en $c \in [a, b]$, se define

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{m \rightarrow c^-} \int_a^m f(x) dx + \lim_{m \rightarrow c^+} \int_m^b f(x) dx.$$

Clase 44: Integrales impropias

Ejemplos fundamentales

1) $\int_0^1 \log(x) dx$ converge [analog. $\int_{x_0}^{1+x_0} \log(x-x_0) dx$]

$$\int_0^1 \log(x) dx = \lim_{m \rightarrow 0^+} \int_m^1 \log(x) dx =$$

$$= \lim_{m \rightarrow 0^+} \left[x \log x - x \right]_m^1 = \lim_{m \rightarrow 0^+} (-1 - m \log(m) + m) = -1.$$

2) $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ $\begin{cases} \text{converge si } p < 1 \\ \text{diverge si } p \geq 1 \end{cases}$ [si $p \leq 0$ no es impropia]

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{m \rightarrow 0^+} \int_m^1 x^{-p} dx \stackrel{p \neq 1}{=} \lim_{m \rightarrow 0^+} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_m^1 =$$

$$= \lim_{m \rightarrow 0^+} \frac{1}{-p+1} \left(1 - m^{-p+1} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 1 \\ 1/(1-p) & \text{si } p < 1. \end{cases}$$

$$\text{Si } p=1, \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \log(x) \Big|_n^1 = \lim_{n \rightarrow 0^+} -\log(n) = +\infty.$$

Nota: Análogo de $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$ y $\int_a^b \frac{1}{(x-b)^p} dx$.

Criterios de convergencia

Igual que para I^a especie:

1) Convergencia absoluta $\Rightarrow$ Convergencia.

2) Criterio de comparación:

Si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a, c]$ con $c \leq b$, entonces

$$\bullet \int_a^b g(x) dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ converge.}$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ diverge.}$$

3) Comparación en el límite: Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in [0, +\infty]$,

$$\bullet L \in (0, +\infty): \int_a^b f(x) dx, \int_a^b g(x) dx \text{ mismo carácter.}$$

$$\bullet L = 0: \int_a^b g(x) dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ converge.}$$

$$\bullet L = +\infty: \int_a^b g(x) dx \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ diverge.}$$

• Ejemplos:

a) $\int_0^1 \frac{x}{1-x^2} dx$ De 2ª especie: $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$
no acotada en $b=1$.

Opción 1: Integrar

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1-x^2} dx &= \lim_{m \rightarrow 1^-} \int_0^m \frac{x}{1-x^2} dx = \\ &= \lim_{m \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{2} \log(1-x^2) \right]_0^m = \\ &= \lim_{m \rightarrow 1^-} -\frac{1}{2} \log(1-m^2) = +\infty.\end{aligned}$$

Opción 2: Comparación o comparación en el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2} \in (0, +\infty).$$

Como $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ diverge, $\int_0^1 \frac{x}{1-x^2} dx$ también.

- Finalmente, decimos que una integral impropia es integral mixta si puede dividirse en intervalos, cada uno dando lugar a integrales de 1° o 2° especie.

↳ Integral mixta es convergente si lo son todas.

• Ejemplo:

a) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2} dx$ integral mixta (pues $f(x) = \frac{\log(x)}{1+x^2}$ no está definida en 0).

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{\log(x)}{1+x^2} dx}_{2^{\circ} \text{ especie}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2} dx}_{1^{\circ} \text{ especie}} = I_1 + I_2.$$

- I_1 es convergente, pues $\int_0^1 \log(x) dx$ lo es y

$$\frac{\log(x)}{1+x^2} \leq \log(x).$$

- I_2 es convergente: lo vemos por comparación en el límite,

pues sabemos que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ es convergente y

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\log(x)}{1+x^2}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} \log(x) =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^{1/2}} = 0.$$

• Integrales euléricas

1) $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ es integral impropia de 1ª especie.

Converge para todo $p \in \mathbb{R}$: podemos verlo por comparación en el límite con $e^{-x/2}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p-1} e^{-x}}{e^{-x/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{p-1} e^{-x/2} = 0.$$

2) $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ es integral impropia de 1ª especie cuando $p < 1$.

Podemos ver que converge para todo $p > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{p-1} e^{-x}}{x^{p-1}} = 1, \text{ y } \int_0^1 x^{p-1} dx \text{ converge si } p > 0.$$

Esto nos permite definir la siguiente función:

• Def: Función Gamma de Euler

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \end{array} \right\}$$

• Lema: 1) $\Gamma(1) = 1$

$$2) \Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

$$3) \Gamma(n+1) = n! \text{ si } n \in \mathbb{N}$$

Dem:

$$1) \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

$$\begin{aligned} 2) \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = \\ &= \int_0^{+\infty} -\frac{d}{dt}(e^{-t}) t^x dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{d}{dt} t^x dt - \cancel{e^{-t} t^x} \Big|_0^{+\infty} = \\ &= x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x \Gamma(x). \end{aligned}$$

3) Consecuencia de 2) y 1)

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \Gamma(n-1) = \dots \\ &= n \cdot (n-1) (n-2) \dots \underbrace{\Gamma(1)}_{=1} = n! \end{aligned}$$

Clase 45: Integrales impropias

• Def.: Función Beta de Euler

$$B : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Comprobemos que está bien definida:

Es impropia de 2ª especie en $t=0$ y $t=1$.

$$\int_0^{1/2} t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \text{ converge si } p > 0 \text{ y todo } q \in \mathbb{R}.$$

$$\int_{1/2}^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \text{ converge si } q > 0 \text{ y todo } p \in \mathbb{R}.$$

• Lema: Propiedades

$$1) B(1,1) = 1$$

$$2) B(x,y) = B(y,x)$$

$$3) B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

• Dem. 1) $B(1,1) = \int_0^1 1 dt = 1$.

$$2) B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \left\{ w = 1-t \right\}$$

$$= - \int_1^0 (1-w)^{x-1} w^{y-1} dw = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt =$$

$$= B(y,x).$$

$$3) [\text{Requiere varias variables}]$$

• Nota: Podemos ahora probar la conocida identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Primero vemos que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt. \text{ Cambio } z = t^{1/2} \rightarrow$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} 2 e^{-z^2} dz.$$

Ahora usamos que $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}.$$

Finalmente calculamos que $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$:

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} dt = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}} = \dots = \pi. \end{aligned}$$

↑
ejercicio

• Ejercicios:

1 i) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} dx$ converge pues

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \text{ converge } y \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2) \log(x)}{x^2} dx = I$, int. mixta.

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin(x^2) \log(x)}{x^2} dx}_{2^{\text{a}} \text{ especie}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2) \log(x)}{x^2} dx}_{1^{\text{a}} \text{ especie}} =$$

$$= I_1 + I_2. \quad \text{Vemos que converge:}$$

• I_1 converge pues $\int_0^1 \log(x) dx$ converge y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{\sin(x^2) \log(x)}{x^2}} = 1.$$

• I_2 converge pues $\frac{\sin(x^2) \log(x)}{x^2} \leq \frac{\log(x)}{x^2} \quad dx \geq 1,$

y vemos que $\int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2} dx$ converge por

comparación en el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\log(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = 0,$

y $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge.

$$h) \int_0^{+\infty} \frac{(x-1) \log|x-1|}{\sqrt{x} (x+2)^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{(x-1) \log(1-x)}{\sqrt{x} (x+2)^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{(x-1) \log(x-1)}{\sqrt{x} (x+2)^2} dx =$$

$$= I_1 + I_2.$$

• I_1 no es realmente impropia:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1) \log(1-x)}{\sqrt{x} (x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\log(1-x)}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2\sqrt{x}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1) \log(1-x)}{\sqrt{x} (x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) \log(1-x) \frac{1}{9} = 0,$$

• I_2 converge: comparación en el límite,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(x-1) \log(x-1)}{\sqrt{x} (x+2)^2}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}}}{x^{\frac{3}{2}}} \log(x-1) = 0,$$

y sabemos que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}} dx$ converge.

Como I_1, I_2 convergen, $\int_0^{+\infty} \frac{(x-1)\log|x-1|}{\sqrt{x}(x+2)^2} dx$ converge.

$$p) I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^p(1+x^2)} dx \quad \text{Mude.}$$

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^p(1+x^2)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^p(1+x^2)} dx = I_1 + I_2.$$

- I_1 es impropia por $x=0$. Vemos que como $\arctan(x) \simeq x$ para $x \simeq 0$, I_1 converge cuando $p-1 < 1 \Leftrightarrow p < 2$.

En efecto, lo probamos por comparación en el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\arctan(x)}{x^p(1+x^2)}}{\frac{1}{x^{p-1}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x)}{2x} = \frac{1}{2},$$

luego I_1 tiene mismo carácter que $\int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}} dx$.

• Como $\arctan(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, vemos que I_2 tiene el mismo carácter que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{p+2}}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\arctan(x)}{x^p(1+x^2)}}{\frac{1}{x^{p+2}}} = \frac{\pi}{2},$$

luego I_2 converge si $p+2 > 1 \Leftrightarrow p > -1$.

Por tanto, I_2 converge para $p \in (-1, 2)$.

3

a) $I = \int_0^1 |\log(x)|^p dx$.

Cambio $z = -\log(x) \rightarrow x = e^{-z}, dx = -e^{-z} dz$

$$I = -\int_{+\infty}^0 z^p e^{-z} dz = \int_0^{+\infty} e^{-z} z^p dz = \Gamma(p+1)$$

Converge si $p > -1$.

$$c) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\log(x)} x^{3/2}} = I. \text{ Cambio } z = \log(x) \rightarrow x = e^z$$

$$dz = \frac{1}{x} dx$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^z dz}{\sqrt{z} e^{\frac{3}{2}z}} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz = \left\{ w = \frac{z}{2} \right\}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-w} w^{-1/2} dw \cdot 2^{1/2} = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\boxed{4} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{\sin^a(x)} dx$$

¿a / I es impropia? ¿a / convergente?

|| Solo hay singularidad en $x=0$.

Sabemos que

$$\left. \begin{aligned} \sin(x) &\sim x \\ 1 - \cos(x) &\sim x^2/2 \end{aligned} \right\}$$

por tanto

$$\frac{1 - \cos(x)}{\sin^a(x)} \sim \frac{x^2/2}{x^a} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{a-2}}.$$

El integrando es no acotado si $a > 2$, pues

- extra

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{\sin^\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/2}{x^{\alpha-2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 2 \\ 1/2 & \text{si } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 2 \end{cases}$$

Luego I es impropia si $\alpha > 2$.

Para $\alpha > 2$, vemos que es convergente si $\alpha < 3$:

Por comparación en el límite,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - \cos(x)}{\sin^\alpha(x)}}{\frac{1}{x^{\alpha-2}}} = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1 - \cos(x)}{\sin^\alpha(x)} dx$ tiene mismo carácter que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-2}}, \text{ que converge } \Leftrightarrow \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \alpha < 3.$$

8 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuo, $f(0) = 0$, derivable en $x = 0$.

Entonces $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{3/2}} dx$ converge.

Sol: Idea: $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x^{3/2}} \sim f'(0) \frac{1}{x^{1/2}} \text{ para } x \approx 0 \quad \perp$$

-extra-

Tenemos que $\left| \int_0^1 \frac{f(x)}{x^{3/2}} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{3/2}} dx.$

Aplicamos ahora el criterio de comparación en el límite [válida para integrales positivas]:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{|f(x)|}{x^{3/2}}}{\frac{1}{x^{1/2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f'(0)x + o(x)|}{x} =$$

$$= |f'(0)| \in [0, +\infty).$$

Por tanto, como $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ converge, $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{3/2}} dx$ también.

9 $I = \int_1^{+\infty} x \sin^{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right) dx$

Opción 1: $y = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow dx = -\frac{1}{y^2} dy$

$$I = \int_1^0 \frac{1}{y} \sin^{\alpha}(y) \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy = \int_0^1 \frac{\sin^{\alpha}(y)}{y^3} dy$$

Por comparación en el límite:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin^{\alpha}(y)}{y^3}}{\frac{1}{y^{3-\alpha}}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^{\alpha} = 1 \Rightarrow$$

-extra-

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin^{\alpha}(y)}{y^3} dy \text{ mismo carácter que } \int_0^1 \frac{dy}{y^{3-\alpha}},$$

$$\text{luego converge} \Leftrightarrow 3-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 2 //$$

Opción 2: Comp. en límite,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sin^{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^{\alpha-1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha} \sin^{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} x \sin^{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right) dx \text{ mismo carácter que } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-1}},$$

$$\text{luego converge} \Leftrightarrow \alpha-1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2 //$$

$$\boxed{10} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \log(x) dx = I$$

$$I = \int_0^1 e^{-\sqrt{x}} \log(x) dx + \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \log(x) dx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 \text{ converge pues } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\sqrt{x}} \log(x)}{\log(x)} = 1 \text{ y } \int_0^1 \log(x) dx \text{ converge.}$$

$$\text{En } I_2, \text{ cambio } y = \sqrt{x}, x = y^2, dx = 2y dy,$$

-extra-

$$I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-y} 2 \log(y) 2y \, dy$$

"la exponencial gana"

Vemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-y} 2 \log(y) 2y}{e^{-y/2}} = 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-y/2} y \cdot \log(y) = 0$$

$$\left[= 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y \log(y)}{e^{y/2}} = \dots = 0 \right]$$

(L'Hôpital)

Como $\int_1^{+\infty} e^{-y/2} \, dy$ converge, entonces I_2 también.

Como I_1 e I_2 convergen, I converge.

12 $f(x) = \frac{x^{1/4}}{1+x^{1/2}}$. ¿ $F / F'(x) = f(x)$, $F(\infty) = 0$?

$$F(x) = \int_0^x \frac{z^{1/4}}{1+z^{1/2}} \, dz. \quad \text{Cambio } w = z^{1/4},$$

$$z = w^4, \, dz = 4w^3 \, dw$$

-extra-

$$F(x) = \int_0^{x^{1/4}} \frac{w}{1+w^2} \cdot 4w^3 dw = 4 \int_0^{x^{1/4}} \left(w^2 - 1 + \frac{1}{w^2+1} \right) dw =$$

$$= 4 \left(\frac{x^{3/4}}{3} - x^{1/4} + \arctan(x^{1/4}) \right).$$

$$a) \int_0^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(0) = +\infty,$$

Nota: Si no conocemos $F(x)$, también podemos ver que es divergente, pues

$$\frac{x^{1/4}}{1+x^{1/2}} \sim \frac{1}{x^{1/4}} \text{ en } x \rightarrow +\infty \text{ y } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/4}} \text{ diverge}$$

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+(F(x))^2} dx = \arctan(F(x)) \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(F(x)) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(F(x)) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \left(4 \left(\frac{x^{3/4}}{3} - x^{1/4} + \arctan(x^{1/4}) \right) \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{F(x)} dx = \log |F(x)| \Big|_0^1 =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1^-} \log |F(x)|}_{= \log |F(1)|} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \log |F(x)|}_{= -\infty} = +\infty.$$

$$= \log |F(1)|$$

$$= \log \left| 4 \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{4} \right) \right|$$

Nota: c) se puede "ver" también pues para

$$x \simeq 0 \rightarrow f(x) \simeq x^{\frac{1}{4}}, \text{ y como } F(x) = \int_0^x f(z) dz,$$

$$F(x) \simeq x \cdot x^{1/4} \quad (x \simeq 0).$$

$$\text{Luego } \frac{f(x)}{F(x)} \simeq \frac{1}{x} \text{ para } x \simeq 0 \text{ (que diverge)} \quad \underline{\underline{\quad}}$$