

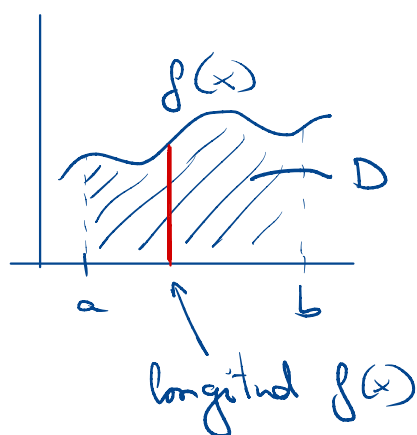
Clase 47: Aplicaciones de la integral

→ Cálculo de áreas, longitudes y volúmenes.

1) Área de regiones descritas por funciones.

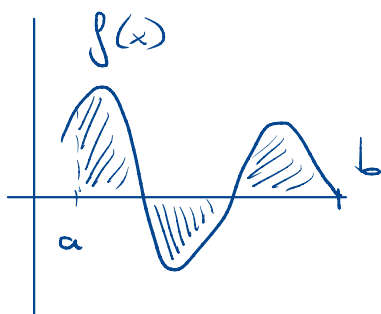
Recintos D de la forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$$



$$\text{Área}(D) = \int_a^b f(x) dx$$

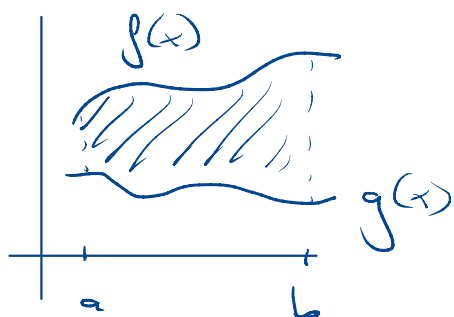
- Si $f(x)$ no es siempre positiva: $A = \int_a^b |f(x)| dx$.



- De forma similar, el área de una región descrita

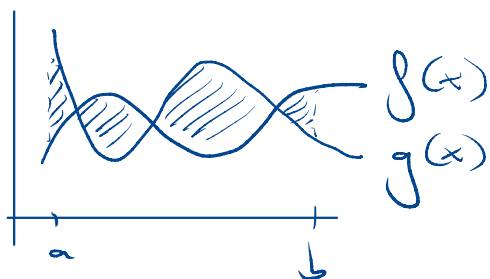
por das funções,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$



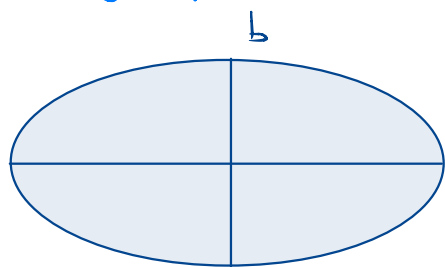
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Y si se cruzan, $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$



Calcular puntos de corte: $f(x) = g(x)$

• Ejemplo: Área de la elipse de semiejes a y b .



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$A = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 4 \int_0^{\pi/2} ab \cos^2(t) dt = \pi ab.$$

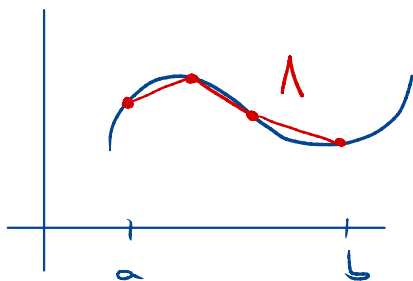
$$x = a \cdot \sin t$$

2 Longitud de arcos de curvas planas.

Definimos la longitud de una curva por aproximación con polígonales.

- Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ acotada y P una partición de $[a, b]$ con n trozos. Denotamos

$$\Lambda(f, P) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$



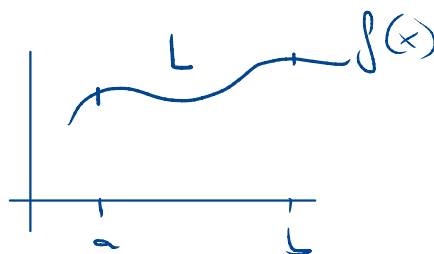
- Def.: Se dice que la curva $y = f(x)$ es rectificable si $\exists \sup_P \Lambda(f, P)$.

En tal caso, se define la longitud del arco de curva como $L = \sup_P \Lambda(f, P)$.

- Teorema: Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ derivable y f' es acotada, entonces f es rectificable.

- Si f es rectificable en $[a, b]$, la longitud del arco de curva viene dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

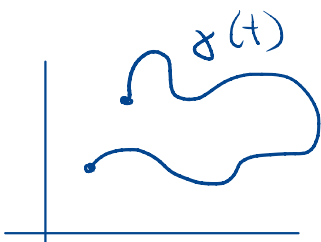


Idea:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} &= \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta f_k)^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{(\Delta f_k)^2}{(\Delta x_k)^2}} \quad \Delta x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \\ &\rightarrow \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx \end{aligned}$$

3] Longitudes y áreas: curvas planas.

- Def: Una curva plana es una aplicación continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $t \mapsto \gamma(t)$



→ Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, se dice que es una curva cerrada.

Nota: La gráfica de $f(x)$ es una curva, pues

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t)).$$

→ Las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ se llaman ecuaciones paramétricas de la curva.

Ejemplo: Circunferencia $\rightarrow x^2 + y^2 = 1$

Como curva paramétrica: $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$
con $t \in [0, 2\pi]$.

• Ejercicio:

Representar las siguientes curvas: (*)

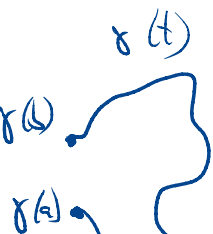
1) Cicloide: $x(t) = a(t - \sin(t))$, $y(t) = a(1 - \cos(t))$,
($a > 0$) $t \in [0, 2\pi]$.

2) Cardiode: $x(t) = a(1 + \cos(t))\cos(t)$,
($a > 0$) $y(t) = a(1 + \cos(t))\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$

3) Astróide: $x(t) = a \cos^3(t)$
 $y(t) = a \cdot \sin^3(t)$, $t \in [0, 2\pi]$

(*) Usar Wolfram $\rightarrow$ ParametricPlot

Ver apuntes $\rightarrow$ Tema 2, pág. 10-11.

• Dada $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$: $\gamma(t)$ 

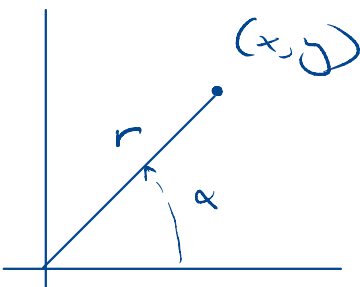
Longitud:
$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Misma idea:

$$L \simeq \sum_k \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sum_k \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}\right)^2} \Delta t_k.$$

3.1) Coordenadas polares

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\alpha) \\ y &= r \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \quad \leadsto \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\alpha) &= \frac{y}{x} \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \alpha &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \right)$$



Una curva se describe en polares dando el valor de la distancia al origen para cada ángulo:

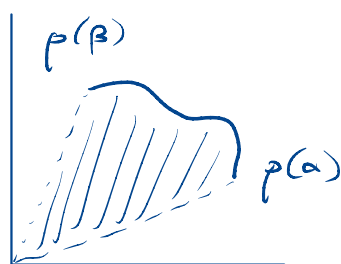
$$\left. \begin{array}{l} \rho : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, +\infty) \\ \theta \mapsto \rho(\theta) \end{array} \right\}$$



En paramétricas queda

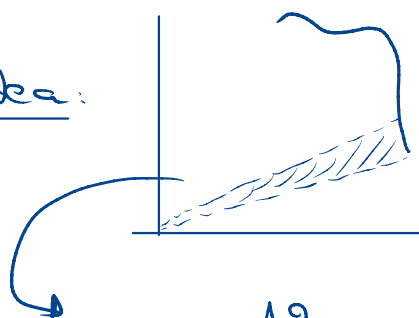
$$\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)), \quad \begin{aligned} x(\theta) &= \rho(\theta) \cos(\theta), \\ y(\theta) &= \rho(\theta) \sin(\theta). \end{aligned}$$

Área



$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\rho(\theta))^2 d\theta$$

Idea:



$$\begin{array}{c} \Delta\theta \\ \nearrow \\ \rho(\theta) \end{array} \approx \rho(\theta) \sin(\Delta\theta) \approx \rho(\theta) \cdot \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \text{Área} \approx \frac{1}{2} (\rho(\theta))^2 \Delta\theta$$

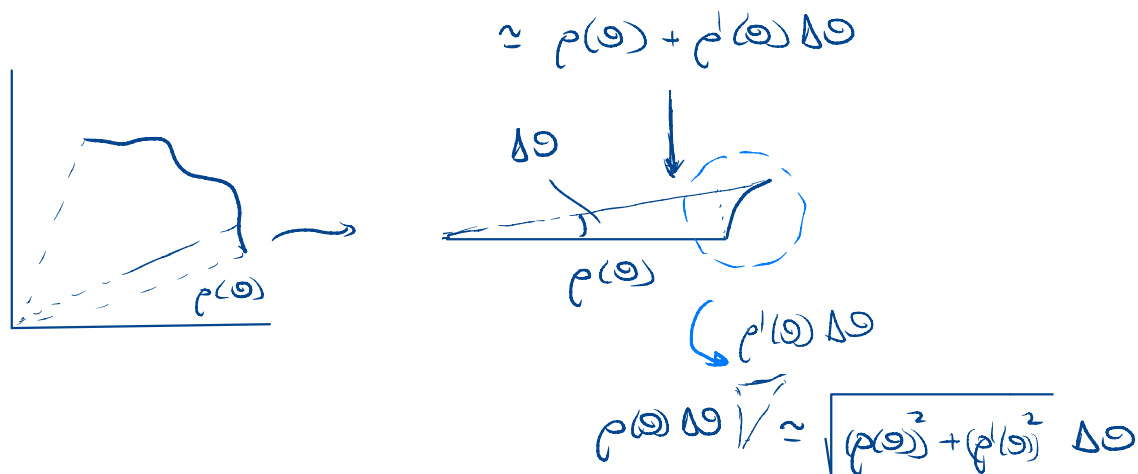
Calse 42: Volumenes

Longitud

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} d\theta$$

→ La fórmula se deduce de la fórmula en paramétricas con $x(t) = \rho(t) \cos(t)$, $y(t) = \rho(t) \sin(t)$

→ Idea "intuitiva":



• Ejercicio: Representar la curva Lemniscata

$$\rho(\theta) = a \sqrt{\cos(2\theta)} \text{ para } a=1, \text{ y calcular}$$

el área que encierra. → Woffen: PolarPlot

Sol:

$$A = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} a^2 \cos(2\theta) d\theta = a^2.$$

• Ejercicio: Calcular la longitud de la cardioide

$$\rho(\theta) = (1 + \cos(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

sol:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)} \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) + \sin^2(\theta)} \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos(\theta)} \, d\theta.$$

$$\text{Como } \cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \rightarrow 1 + \cos(\theta) = 2 \cos^2(\theta/2).$$

Así,

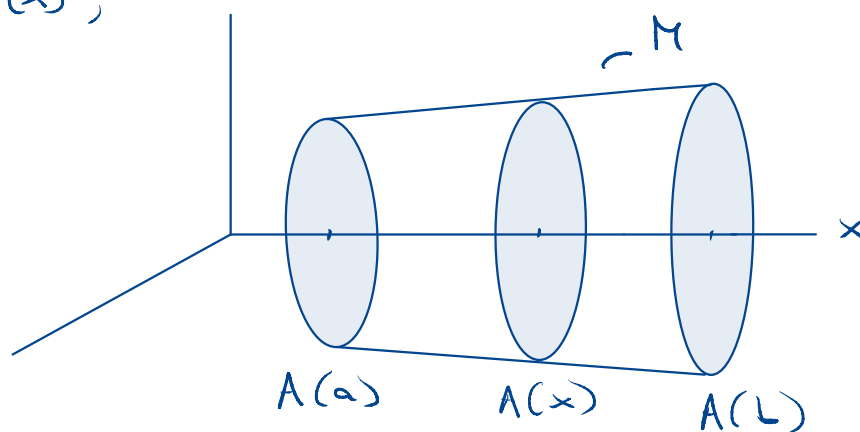
$$L = 2 \int_0^{2\pi} |\cos(\theta/2)| \, d\theta = 4 \int_0^{\pi} \cos(\theta/2) \, d\theta =$$

$$= 4 \cdot 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Big|_0^{\pi} = 8.$$

4) Volúmenes

4.1) Volúmenes de secciones de áreas conocida

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ un sólido tal que las secciones por planos perpendiculares al eje OX tienen áreas conocida $A(x)$,



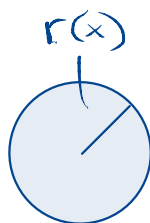
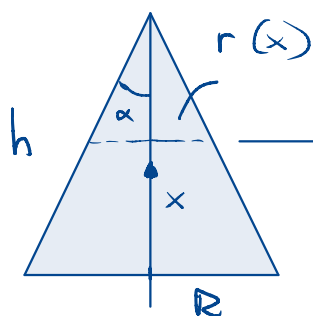
→ Principio de Cavalieri:

$$Vol(M) = \int_a^L A(x) dx$$

• Ejemplos:

1) Volumen de un cono de base circular con radio R y altura h .

Sol:



$$A(x) = \pi(r(x))^2$$

$$\text{¿ } r(x)? \quad \tan(\alpha) = \frac{R}{h} = \frac{r(x)}{h-x} \Rightarrow r(x) = \frac{R}{h}(h-x)$$

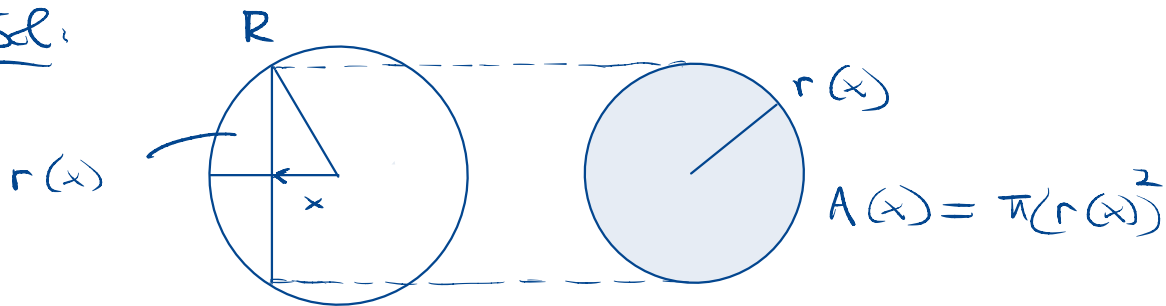
Por tanto,

$$\text{Vol} = \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \pi R^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx =$$

$$= \pi R^2 \left[-\frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^3 h \right]_0^h = \frac{\pi}{3} R^2 h.$$

2) Volumen esfera de radio R :

Sol:



$$r(x) \quad \begin{array}{c} R \\ \triangle \\ x^2 \end{array} \Rightarrow (r(x))^2 = R^2 - x^2.$$

$$\text{Vol} = 2 \int_0^R A(x) dx = 2\pi \int_0^R (r(x))^2 dx =$$

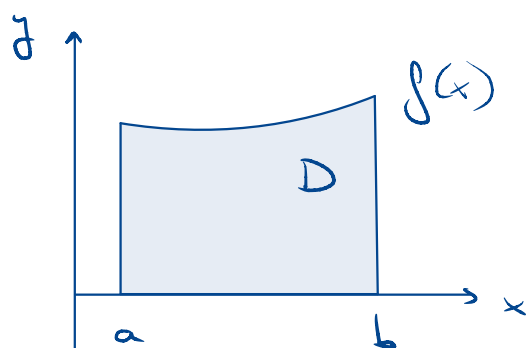
$$= 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

- Ejercicio: Volumen del cono de altura h y base (circular) elíptica con semiejes a y b .

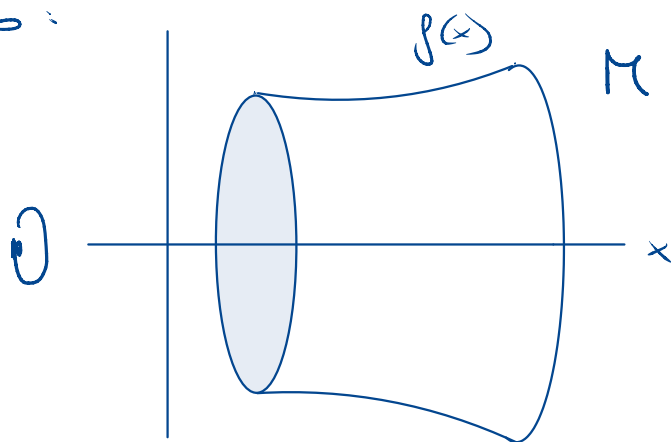
4.2) Volúmenes de sólidos de revolución

Sea D una región plana:

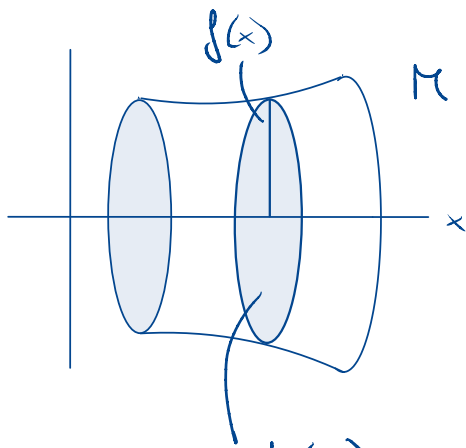
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$



- Al girar D alrededor del eje Ox genera un sólido:



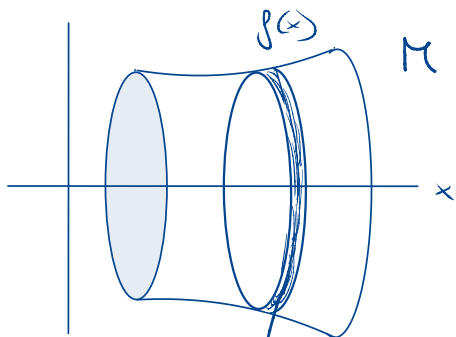
¿Volumen de M ? $\rightarrow$ "Método de los discos"



$$V(M) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$A(x) = \pi (f(x))^2 \leftarrow \text{Círculo de radio } f(x).$$

→ ¿Y la superficie lateral de M?



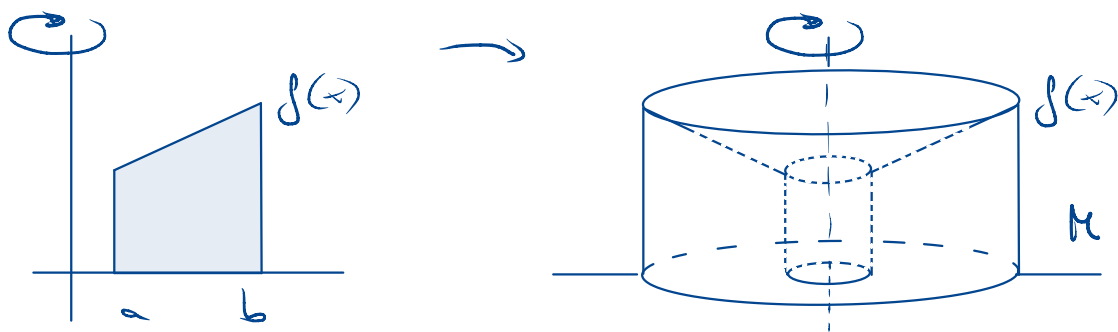
$$A(M) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

(sin contar las "tapas")

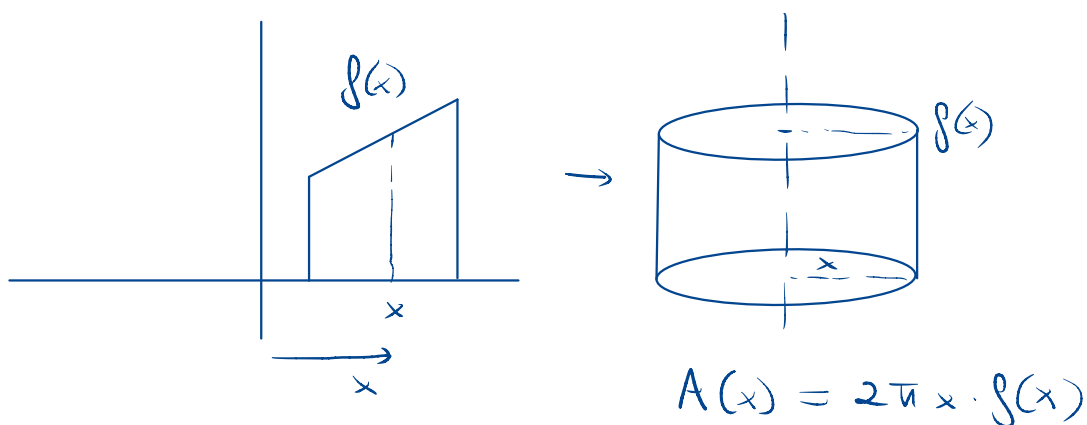
$$\underbrace{2\pi f(x)}_{\text{longitud circunferencia}} \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}_{\text{anchura cinta}}$$

$$\left(\simeq \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta f_k^2} \right)$$

- Si giramos la región D alrededor del eje OY generamos otro sólido:



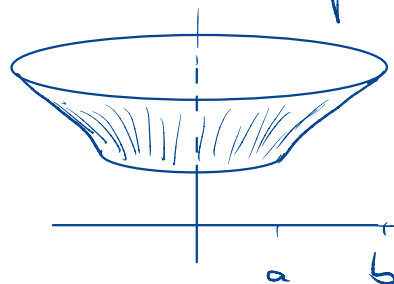
¿ Volumen de π ? $\rightarrow$ "Método de los discos"



$$Vol(\pi) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

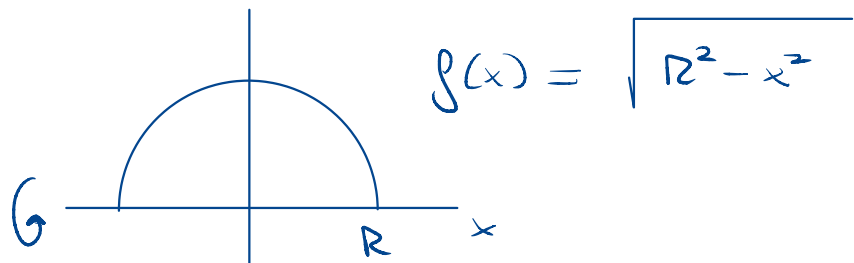
- El área de la superficie superior viene dada por

$$A = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



- Ejemplo: Área de la esfera de radio R .

Sol: Lo hacemos por revolución en Ox :



$$A = 2\pi \int_{-R}^R f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx =$$

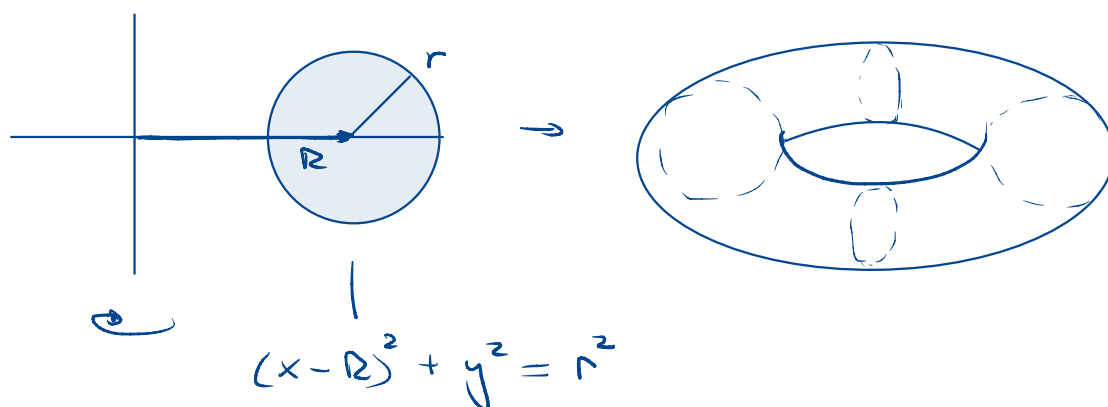
$$= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx =$$

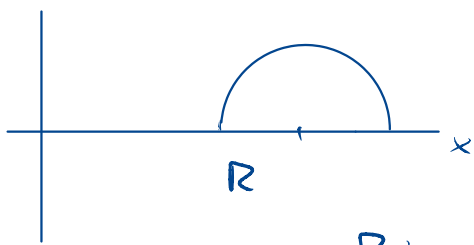
$$= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 4\pi R^2 \quad \checkmark$$

• Ejemplo: Volumen del toro de radios $R > r$.

Sol: Por revolución en OY





$$f(x) = \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$$

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x f(x) dx = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx$$

Cambio: $x - R = r \cdot \sin(t) \rightarrow dx = r \cdot \cos(t) dt$

$$x = R - r \rightarrow \sin(t) = -1 \rightarrow t = -\pi/2$$

$$x = R + r \rightarrow \sin(t) = 1 \rightarrow t = \pi/2$$

$$Vol = 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R + r \cdot \sin(t)) \cdot r |\cos(t)| (r \cdot \cos(t)) dt =$$

$$= 4\pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R \cos^2(t) + r \sin(t) \cos^2(t)) dt =$$

$$= 4\pi r^2 \left[R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt + r \frac{-\cos^3(t)}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= 2\pi^2 R r^2 //$$

$$\uparrow$$

$$\left(2\pi R \cdot \pi r^2 \right)$$

⌘ + Ejercicio code

1 km en 1h ...

$$v_o = v_g = 0 \quad \Downarrow$$