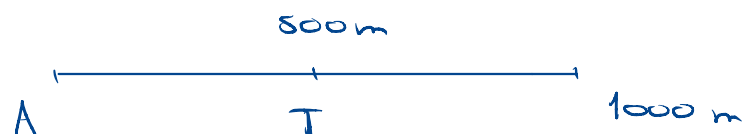


Clase 49: Sucesiones (numéricas).

Paradoja de Zenón: "De Aguires y la tortuga"

Supongamos una carrera de 1000m. La tortuga avanza a velocidad constante de 100m/h y

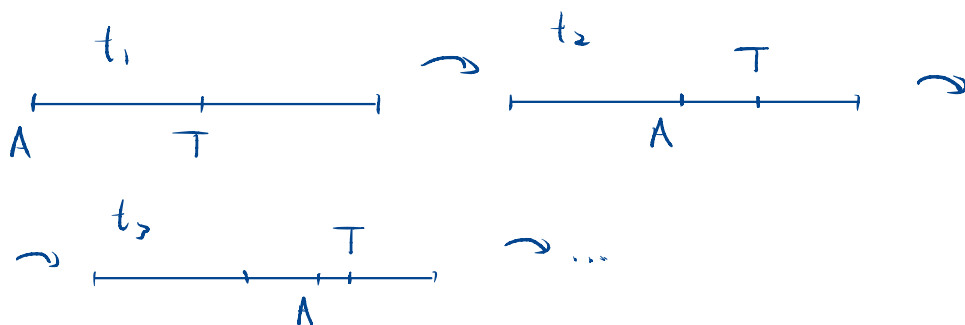
Aguires a velocidad constante de 10000m/h. La tortuga sale con ventaja en los 500m.



¿Quién llega antes?

$$\begin{aligned} T_A &= 1000 / 10000 = 0.1 \text{ h} \\ T_T &= 500 / 100 = 5 \text{ h} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} T_A &= 1000 / 10000 = 0.1 \text{ h} \\ T_T &= 500 / 100 = 5 \text{ h} \end{aligned}} \right\} \text{ Aguires gana.}$$

“Sin embargo”: Aguires nunca puede alcanzar a la tortuga, puesto que primero tiene que llegar al punto donde la tortuga estaba, y ésta habrá avanzado. Y así indefinidamente.



- Def.: Una sucesión de números reales es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$,

$$\left. \begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) = a_n \end{aligned} \right\}$$

La imagen de f corresponde con una lista de números: $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Por ejemplo, la sucesión $f(n) = \frac{1}{n}$ se identifica con el listado $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.

- Normalmente una sucesión se denota simplemente como $\{a_n\}$, donde a_n es el término general.
- Podemos definir una sucesión dando la expresión del término general:

Ej: $\{a_n\}$ con $a_n = (-1)^n \rightarrow -1, 1, -1, 1, \dots$

$$\{b_n\} \text{ con } b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ impar} \\ 2^n & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \rightarrow \{1, 2, 1, 2^4, \dots\}$$

- También podemos definirlos por recurrencia:

Ej: Sucesión de Fibonacci

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \end{array} \right\} \rightarrow 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

- Normalmente nos interesará saber:

- 1) Si la sucesión "converge" a un valor.
- 2) Si podemos "sumar" todos los términos (infinito) y obtener un número finito.

Ejemplo: Problema de Basilea

Demuestra que $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.

- Def: La sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ si

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ / para todo $n \geq n_0$ se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon$ (es decir, $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$).

Denotaremos $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ y diremos que la sucesión es convergente.

- Def: $\{a_n\}$ tiene límite $+\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, si

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / a_n > M \quad \forall n \geq n_0.$$

Análogamente se define $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$, y también

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty \text{ si } \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} /$$

$$\forall n \geq n_0, |a_n| > M.$$

En estos casos se dice que la sucesión diverge.

- Si la sucesión no converge ni diverge, se dice que es oscilante ($\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ no existe).
- Teorema: Sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in S$, $L \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L \text{ para cualquier}$$

sucesión $\{a_n\}$ en S
convergente a a .

Nda: También cierto cuando L o a son infinitos.

→ Podemos así calcular límites como ya conocemos.

Además de lo ya conocido (L'Hôp., Sandwich, ...),
veremos algunos criterios para determinar si una
sucesión es convergente.

Def. Se dice que $\{a_n\}$ es creciente si

$$a_{n-1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

• Criterio de Stolz: Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ sucesiones tales
que:

- 1) $\{b_n\}$ es creciente
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$
- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L \in [-\infty, \infty].$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L$$

Ejemplo: Calcular $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + \dots + (2n-1)}{2n^2 + 1}.$

Sl:

$$b_n = 2n^2 + 1, \text{ creciente, } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty.$$

Aplicamos Stolz:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{2n^2 - 2(n-1)^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{2\cancel{n^2} - 2\cancel{n^2} + 4n - 2} = \frac{1}{2}.$$

- A partir del criterio de Stolz se deducen los siguientes criterios:

(son $\Rightarrow$, no $\Leftarrow$)

1) De la media aritmética:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$$

(con $L \in [-\infty, +\infty]$)

2) De la media geométrica:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = L$$

($a_n > 0, L \in [0, +\infty]$)

3) De la raíz:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

($a_n > 0, L \in [0, +\infty]$)

Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = L.$

Sol:

Reescribimos $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}}$ y usamos

el criterio de la raíz con $a_n = \frac{(2n)!}{n^n n!}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)! n^n n!}{(n+1)^{n+1} (n+1)! (2n)!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = L.$$

Finalmente,

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+2)(2x+1)}{(x+1)^2} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x =$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x = 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log \left(\frac{x}{x+1} \right)} =$$

$$= 4 e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{x}{x+1} - 1 \right)} = 4 e^{-1}.$$

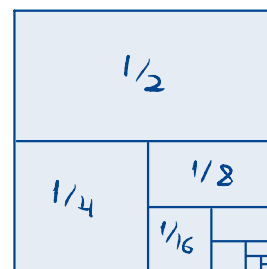
Clase 50: Series (numéricas)

Dada una sucesión $\{a_n\}$, queremos saber si podemos sumar todos sus términos y obtener un número finito.

Ej: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots \longrightarrow \{a_n\}, a_n = 2^{-n}$

¿ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$ es finita ?

Sí. Podemos "ver" geométricamente:



$\rightarrow$ ¿ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$?

- Def.: Dada una sucesión $\{a_n\}$, se define la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ con

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{m=1}^n a_m.$$

La sucesión $\{S_n\}$ se llama serie de término general a_n , y se suele denotar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Se dice que la serie es convergente/divergente si la sucesión $\{S_n\}$ lo es.

Si la serie es convergente, i.e., $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$,

entonces se dice que la suma de la serie es S ,

y se denota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$.

Nota:

- 1) El carácter de una serie no depende de los primeros términos (como en las integrales impropias):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^M a_n}_{\text{número finito}} + \sum_{n=M}^{\infty} a_n$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
 $\nLeftarrow$

Ejemplos notables

1) Serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Podemos calcular el valor exacto de la suma.

$$\text{Suma parcial: } S_n = \sum_{m=0}^n x^m.$$

Entonces:

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$x S_n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1}$$

$$\hookrightarrow S_n(1-x) = 1 - x^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Vemos que es convergente si y sólo si $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

2) Serie telescópica: $\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$, $\{x_n\}$ sucesión.

La serie converge $\Leftrightarrow \{x_n\}$ converge.

De hecho,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) = (\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + (\cancel{x_3} - \cancel{x_2}) + \dots + \\ &\quad / + (\cancel{x_n} - \cancel{x_{n-1}}) + (x_{n+1} - \cancel{x_n}) = \\ &= x_{n+1} - x_0 \end{aligned}$$

Así, si $\{x_n\}$ converge, la serie suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) - x_0.$$

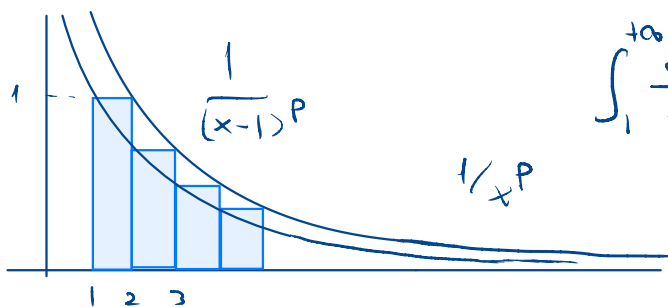
3) Serie aritmético-geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} (a + nb)x^n$
 $(a, b, x \in \mathbb{R})$.

Converge $\Leftrightarrow |x| < 1$, y $\sum_{n=0}^{\infty} (a + nb)x^n = \frac{a(1-x) + bx}{(1-x)^2}$.
 (si $|x| < 1$)
 prueba como la geométrica.

4) Series armónicas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{array}{l} \text{Converge si } p > 1 \\ \text{Diverge si } p \leq 1 \end{array}$$

Se demuestra por comparación con $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$,



$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq 1 + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^p}$$

Normalmente, el valor de la suma solo podemos aproximarla numéricamente (si la serie converge).

- Ejercicio: Calcular $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Sol: Resulta ser una serie telescópica pues

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Por tanto, $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = 1.$

- Estudiamos a continuación criterios de convergencia. Primero vemos series de términos positivos.

- Def: $\sum a_n$ es absolutamente convergente si

la serie $\sum |a_n|$ es convergente.



- Prop: $\sum a_n$ absolutamente convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente



Si $\sum a_n$ converge pero no absolutamente, se dice que es condicionalmente convergente.

Clase 51: Criterios de convergencia para s.t.p.

Serie de términos no negativos

$\sum a_n$ es s.t.p. si $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Nota: Una s.t.p. converge o diverge a $+\infty$.

1) Criterio de comparación: Sean $\sum a_n, \sum b_n$ s.t.p.

con $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Entonces:

- $\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$
- $\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$.

Ejemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{3^n}$ ¿converge?

Sol: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{3^n}$ es s.t.p. y converge pues

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} < +\infty \quad \text{y} \quad \frac{|\sin(n)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n} \quad \forall n \geq 0.$$

Luego $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{3^n}$ converge (absolutamente).

2) Criterio de comparación en el límite:

Sea $\sum a_n, \sum b_n$ s.t.p. con $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in [0, +\infty]$.

Entonces:

- Si $L \in (0, +\infty)$: $\sum a_n$ y $\sum b_n$ mismo carácter,
- Si $L = 0$: $\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$,
- Si $L = +\infty$: $\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$.

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2 \log(n)}{n^2}$ diverge pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n + 2 \log(n)}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

3) Criterio del cociente (o de D'Alembert):

Sea $\sum a_n$ s.t.p. con $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty]$.

Entonces:

- $L < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty$
- $L > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$.

Nota: Si $L = 1$, no se concluye nada.

Ejemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Sol: $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} =$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2 \cancel{n!}^2 (2n)!}{(n!)^2 (2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} =$

$= \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} < +\infty.$

4) Criterio de la raíz:

$\sum a_n$ s.t.p. con $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, +\infty]$.

Entonces:

• $L < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty$

• $L > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty.$

Nota: Si $L=1$, el criterio no dice nada.

Nota: Por el criterio de la raíz para sucesiones, vemos que 4) es más fuerte que 3), pues

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$

Nota: El criterio de la raíz es útil cuando no existe el límite del cociente.

Ejemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3} \right)^{n^2} = S$.

Sol:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{n+1}{n+3} \right)^{n^2} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+3} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \log \left(1 + \frac{n+1}{n+3} - 1 \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{-2}{n+3}} = e^{-2} \end{aligned}$$

luego $S < +\infty$.

5) Criterio de la integral:

Sea $f: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ decreciente. Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Ejemplo: $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log(n))^p}$

Sol: S_1 converge si y solo si $p > 1$.

• S_2 converge si y solo si $p > 1$, pues

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\log(x))^p} = \frac{(\log(x))^{-p+1}}{-p+1} \Big|_2^{+\infty} < +\infty \quad \text{si } p > 1$$

$$\begin{array}{c} p \neq 1 \\ \downarrow \\ p=1 \end{array} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log(x)} = \log(\log(x)) \Big|_2^{+\infty} = +\infty$$

→ Si la serie no es de términos positivos, tenemos tres casos: $\sum a_n$

1) Estudiar $\sum |a_n|$ y que resulte convergente.

2) Casos particulares que podemos estudiar a partir de la definición,...

3) Caso particular: series alternadas

• Def: Dada $\{a_n\}$ sucesión con $a_n \geq 0$, se dice que la serie $\sum (-1)^n a_n$ es una serie alternada.

• Criterio de Leibniz: Una serie alternada $\sum (-1)^n a_n$,

con $\{a_n\}$ decreciente converge si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Además, la suma de la serie cumple que

$$|S - S_n| < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad [*]$$

Nota: Observad que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \leq a_1$, pues

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\leq 0} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\leq 0}$

dado que $\{a_n\}$ decreciente

• Igualmente vemos [*]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = \\ &= (-1)^n \left[a_{n+1} - \underbrace{a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots}_{\leq 0} \right] \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\leq a_{n+1}} \end{aligned}$$

• Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

todas convergen (las dos primeras condicionalmente, la última absolutamente).

Clase S2: Ejercicios

[1] g) j) e) o), [11] h) [12] m), [7], [8], [9]

[4] e), b), h) [5] a) f) d)

[13] a) p) g) d) e)