

Clase 53: Series de potencias

Si recordamos el Teorema de Taylor, para funciones $f(x)$ n veces derivables en x_0 , $f(x)$ se aproximaba bien, cerca de x_0 , por su polinomio de Taylor de grado n :

$$f(x) = p_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{|x-x_0|^n} = 0.$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

- ¿Podemos hacer $n \rightarrow +\infty$?

↳ I.e., dada $f(x)$, ¿se puede escribir como una "suma infinita" de potencias?

serie

↳ Veremos que sí bajo ciertas condiciones.

↳ En esos casos, integrar y derivar será muy

fácil:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightsquigarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1}$$
$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

- Def.: Dada una sucesión $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{R}$ (coeficientes), y un número $c \in \mathbb{R}$ (centro), la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \text{ se llama serie de potencias en } (x-c).$$

- Para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos una serie numérica, cuya convergencia ya sabemos estudiar.

Nota: Una serie de potencias define una función con dominio aquellos valores de x para los que la serie converge.

$$S: D(S) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \Bigg|,$$

$$D(S) = \{ x \in \mathbb{R} : S(x) \text{ converge} \}$$

- Resulta que el dominio de $S(x)$ es siempre un intervalo centrado en c , llamado intervalo de convergencia.

• Teorema: [de Hadamard]

Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

- converge absolutamente $\forall x \in (c-R, c+R)$,
- no converge para $x \in (-\infty, c-R) \cup (c+R, +\infty)$,

donde $R \in [0, +\infty]$ se llama radio de convergencia.

Nota: La convergencia en los extremos del intervalo debe estudiarse aparte

(puede obtenerse como intervalos de convergencia $(c-R, c+R)$, $(c-R, c+R]$, $...$).

El radio de convergencia lo podemos calcular

como:

$$R = \frac{1}{\lambda} \quad \text{con} \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(usando el criterio de la raíz para series numéricas)

También

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad (\text{si existe el límite}).$$

Ejemplos:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en $(-1, 1)$ [serie geométrica]

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge en $\mathbb{R}$, pues

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow R = +\infty.$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (x-1)^n$ tiene radio de convergencia

$$R = \frac{1}{1}, \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n}{(n+1) 2^n} = 2.$$

Falta ver que ocurre en los extremos: $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$.

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n} \frac{1}{2^n} \text{ converge por crit. de Leibniz.}$$

$$x = \frac{3}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge (serie armónica)}$$

$$\text{Luego } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (x-1)^n \text{ tiene intervalos de convergencia } \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

Propiedades de las series de potencias

Dada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, estudiamos la función que queda definida por la serie:

$$\left. \begin{aligned} S: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \end{aligned} \right\}$$

($I \equiv$ intervalo de convergencia)

• Teorema: [Derivación e integración de series de potencias].

La serie de potencias $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ es

derivable e integrable en $(c-R, c+R)$, siendo R su radio de convergencia.

Además,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n (x-c)^{n-1} \text{ en } (c-R, c+R), \\ \int S(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1} \text{ en } (x-R, x+R). \end{aligned}$$

• Más aun, en $(c-R, c+R)$ la función es infinitamente derivable y se tiene que

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-c)^{n-k}, \quad x \in (c-R, c+R).$$

Nota: De lo anterior se deduce que

$$S^{(k)}(c) = k! a_k \rightarrow a_k = \frac{S^{(k)}(c)}{k!}.$$

- Tenemos pues que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ define una función $S(x)$ infinitamente derivable en $(c-R, c+R)$, y se cumple que $a_n = \frac{S^{(n)}(c)}{n!}$.

- La pregunta natural es entonces al revés: Dada una función $f(x)$, ¿se puede escribir como una serie de potencias?

↳ I.e., dada $f(x)$, ¿ $\exists a_n \in \mathbb{R} / f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$?

Hemos visto ya que, si existe tal expresión para $f(x)$, entonces necesariamente los a_n vienen dados por $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

- Def.: Si f tiene derivadas de todos los órdenes en $x = x_0$, se llama serie de Taylor de f en x_0 a

la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

- Def.: Una función $f: (x_0-R, x_0+R) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice analítica en x_0 si es igual a su serie de Taylor en x_0 en un entorno de x_0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0-R, x_0+R).$$

Nota: Existen funciones infinitamente derivables que no son analíticas. Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Se comprueba que f es infinitamente derivable en $x=0$ y $f^{(n)}(0)=0 \quad \forall n \geq 0$. Por tanto, su serie de Taylor es la función nula, que no coincide con $f(x)$ en ningún entorno de $x=0$.

Colección 54: Series de potencias

- En resumen, las series de potencias con radio de convergencia no nulo definen funciones analíticas dentro de su intervalo.
- En la dirección opuesta, si una función es analítica en un punto, se puede escribir como una serie de potencias en un entorno de ese punto.

¿Y cómo saber si $f(x)$ es analítica en x_0 ?

• Teorema: [Condición suficiente]

Sea f infinitamente derivable en $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Si existe $M > 0$ /

$$\left. \begin{array}{l} f^{(n)}(x) \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) \end{array} \right\} \text{ entonces } f \text{ es analítica en } x_0.$$

$$(\text{i.e. } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n).$$

- Con todo ello podemos ver que las siguientes funciones son analíticas en $x_0 = 0$, calcular sus series de Taylor y los intervalos donde coinciden:

$$1) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

$$3) \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1]$$

$$4) \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$5) \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$6) \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad [-1, 1]$$

• Ejercicios:

2 $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$. Calcular radio e intervalo de convergencia y su suma.

Sol: $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1 \Rightarrow R=1.$

Extremos del intervalo: $x = \pm 1$. Vemos que diverge en ambos,

$$\sum_{n \geq 1} n^3, \sum_{n \geq 1} (-1)^n n^3 \text{ divergentes } (a + \infty \text{ y } \infty)$$

Por tanto, intervalo de convergencia $(-1, 1)$.

¿Suma?

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

$$\text{Sabemos que } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \cdot \frac{(1-x)^2 + x \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1} = \frac{d}{dx} \left(x \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x+x^2}{(1-x)^3} \right) =$$

$$= x \frac{(1+2x)(1-x)^3 + (x+x^2)3(1-x)^2}{(1-x)^6} =$$

$$= x \frac{(1+2x)(1-x) + 3(x+x^2)}{(1-x)^4} = x \frac{1+x-2x^2+3x+3x^2}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4} \quad (\text{para } x \in (-1,1)).$$

5 $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1} - n) x^n$. ¿Radio de convergencia?
¿Suma?

Sol:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+2} - (n+1)}{2^{n+1} - n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - 2^{n-1}(n+1)}{1 - 2^{n-1}n} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suma: } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1} - n) x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot (2x)^n - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n.$$

$$\text{Sabemos que } \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ para } |z| < 1.$$

$$\text{Luego, } \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} - 1 = \frac{z}{1-z}, \text{ y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^{n-1} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \cdot \frac{1}{(1-z)^2}$$

Por tanto,

$$S(x) = 2 \cdot \frac{2x}{1-2x} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{4x(1-x)^2 - x(1-2x)}{(1-x)^2(1-2x)},$$

para $|x| < \frac{1}{2}$.

8

a) $f(x) = x \cdot \log(1+x^2)$.

Se pide: serie de Taylor e interval de convergencia.

Sol: Sabemos que para $x \in (-1, 1]$ se tiene que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Por tanto,

$$\log(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} \text{ cuando } x^2 \in (-1, 1].$$

Es decir, cuando $x^2 \in [0, 1] \leadsto x \in [-1, 1]$.

Finalmente,

$$f(x) = x \cdot \log(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

b) Calcular $\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1}$.

Calcular la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)}{4^n \cdot n}$.

Sol: Para $x \in (-1, 1)$,

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1}.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (2n+1) x^{2n} =$$

$$= \log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}, \text{ para } |x| < 1.$$

• Evaluamos en $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{2n+1}{4^n} = \log\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1/2}{1+1/2} =$$

$$= \log\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{1}{3}.$$

c) Usando crit. de Leibniz, averiguar n /

$$|S - S_n| < 0.1, \text{ con } S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)}{4^n \cdot n}.$$

Sol: $|S - S_n| < a_{n+1}$, con

$$a_{n+1} = \frac{2n+2}{4^{n+1}(n+1)}$$

Vemos que para $n = 2$,

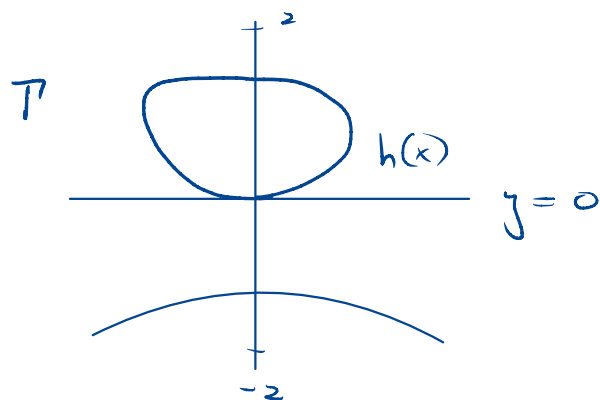
$$|S - S_2| < a_3 = \frac{2}{4^3} = \frac{1}{32} \approx 0.03.$$

9 (Ejercicio casa $\approx$ 8).

Clases 55, 56: Ejercicios

• Ejercicio: Sea T la siguiente curva

$$T = \{ (x, y) \in \mathbb{P}^2 : -x^2 - y^3 + 2y = 0 \}$$



Cerca de $x=0$, $y=0$, la curva viene descrita por una función $h(x)$.

¿Cómo podemos encontrar $h(x)$, con x cerca del origen?

- Ex. 01/22: Estudiar carácter de

$$I = \int_0^1 x^\alpha \cdot \arctan x \, dx \text{ en función de } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Calcular la integral para $\alpha = -\frac{1}{2}$.

- Ex. 01/23: Estudiar carácter de

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^p \sqrt[3]{x}} \, dx \text{ en función de } p \in \mathbb{R}.$$

Calcular la integral para $p=1$.

- Ex. 01/22: Calcular el área común de

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

Calcular el volumen del sólido generado al girar dicha región alrededor del eje ox .

- Ex. 01/22: Calcular

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}}.$$

• Lx. 01/23:

a) Calcular mediante una integral

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}.$$

b) Calcular

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt},$$

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin(t^{1/4}) dt}{x^{3/2}}.$$

• Ejercicio: Sea $\{a_n\}$ la sucesión de Fibonacci

$$\text{definida por } \left. \begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = a_2 = 1 \end{array} \right\}$$

a) Calcular $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

b) Encontrar una fórmula explícita para a_n , i.e., hallar el n -ésimo número de Fibonacci.

- Ejercicio: Estudiar el carácter de

$$I = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx, \quad [\text{Integral de Fresnel}]$$

¿Converge absolutamente? ¿Y condicionalmente?