Problemas Tema 11

Límite y continuidad de funciones de varias variables

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Cada una de las desigualdades siguientes define un subconjunto del plano. Represéntalos gráficamente.

(a) $x^2 + y^2 < 1$;

(b) $|x| < 1$ y $|y| < 1$;

(c) $|x| + |y| < 1$;

(d) $|x| < 1$ y $|y| \leq 1$;

(e) $1 \leq x \leq 2$ y $3 < y < 4$;

(f) $(2x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - x) > 0$;

(g) $xy < 0$;

(h) $y > x^2$, $|x| < 2$;

(i) $(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0$;

(j) $3x^2 + 2y^2 \leq 1$;

2. Representa las siguientes funciones mediante sus curvas de nivel:

(a) $f(x, y) = 4 - 3x + 2y$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $f(x, y) = x^2 + xy$

(d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

3. Prueba que no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ en los siguientes casos:

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = e^{-x^4/y^2}$ si $y \neq 0$; $f(x, 0) = 0$.

4. Estudia la existencia del límite doble en el origen de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$

(c) $f(x, y) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}$

(d) $f(x, y) = \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}$

(e) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(f) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

(g) $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3}$

(h) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^3}{x^4 + y^6}$

5. Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x,y) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$; $\quad f(0,0) = 0.$

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$ si $(x,y) \neq (0,0)$; $\quad f(0,0) = 0.$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2-xy+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$; $\quad f(0,0) = 0.$

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

6. Estudia la existencia del límite doble en el origen de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$

(c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

(f) $f(x,y) = (x+y)\cos\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$

(g) $f(x,y) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{y}$

(h) $f(x,y) = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(i) $f(x,y) = \dfrac{x}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{x\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}$

7. Estudia la existencia del límite doble en el origen de la función $f(x,y) = (x+y)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{y}$ si $x \neq 0, y \neq 0$; $f(x,0) = f(0,y) = a$.

8. Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ si $x \neq 0$; $\quad f(0,y) = \frac{\pi}{2}.$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+\operatorname{sen}^2(x+y)}{x+y}$ si $x+y \neq 0$; $\quad f(x,-x) = 0.$

Problemas Tema 12

Diferenciación de funciones de varias variables

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Halla el vector gradiente en cada punto en el que exista para los campos escalares siguientes:

(a) $f(x,y) = x^2y - xy^4$

(b) $f(x,y) = 3x^2e^y - y^2\cos x$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$

(d) $f(x,y) = \log(x^2 - 2y^2)$

(e) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$

(f) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$

2. Calcula la derivada de f en a según la dirección u para las funciones:

(a) $f(x,y) = xy$, $a = (1,3)$, $u = (2,-1)$

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $a = (1,-1)$, $u = (1,1)$

(c) $f(x,y) = xe^{xy}$, $a = (0,1)$, $u = (1,-1)$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+2y^2}$, $a = (1,4)$, $u = (0,1)$

(e) $f(x,y) = \sqrt{xy}$, $a = (-1,-1)$, $u = (1,1)$

(f) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $a = (1,1)$, $u = (1/2, \sqrt{3}/2)$

(g) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$, $a = (0,0)$, $u = (\sqrt{3}, 1)$

(h) $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $a = (1,-1,2)$, $u = (10,11,-2)$

3. Halla el vector gradiente en cada punto en el que exista para los campos escalares siguientes:

(a) $f(x,y) = e^x \cos y$

(b) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2$

(c) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2x^2$

(d) $f(x,y,z) = \log(x^2 + 2y^2 - 3z^2)$

4. Halla las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a cada una de las superficies siguientes en los puntos que se indican.

a) $z = e^{-(x^2+y^2)}$ en $(0,0)$ *b*) $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ en (x_0, y_0) *c*) $z = x^2 + y^3$ en $(3,1)$

5. Dada $f(x,y) = x^2y + 2y^2x$ y $a = (1,3)$, halla

(a) la dirección de mayor crecimiento de f,

(b) la derivada de f en la dirección de mayor crecimiento,

(c) las direcciones en las que la derivada de f es nula,

(d) la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en $(1,3,21)$.

6. Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones (en todos los casos es $f(0,0) = 0$):

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$

(f) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$

(g) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(h) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

(i) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

(k) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(l) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(m) $f(x,y) = xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$

7. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{2x^2+y^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

(a) Estudia la continuidad de f en el origen.

(b) Calcula la derivada direccional de f en el origen en cualquier dirección unitaria $u = (u_1, u_2)$.

(c) Encuentra una dirección unitaria u para la cual $D_u f(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot u$. ¿Es f diferenciable en el origen?

(d) Calcula $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, si existen.

8. Halla la matriz jacobiana de los siguientes campos vectoriales:

(a) $f(x,y) = (x,y)$

(b) $f(x,y,z) = (x+y+z, y, x^2)$

(c) $f(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$

(d) $f(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)$

9. Comprueba la regla de la cadena en los siguientes casos:

(a) $f(x,y) = \cos(xy)$, $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$.

(b) $f(x,y,z) = x^2 + xyz$, $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $z = t^2$

10. Sea $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$; $f(0,0) = 0$. Calcula sus derivadas de segundo orden en $(0,0)$.

11. Sea $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; $f(0,0) = 0$. Calcula $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

12. Usa desarrollos de Taylor para calcular los siguientes límites, si existen:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\mathrm{sen}\,y + y\,\mathrm{sen}\,x}{xy}$ *b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{sen}\,x - y}{x - \mathrm{sen}\,y}$

13. Comprueba que la ecuación $x^2+y^2+\log(x^2+y^2) = 1$ define una función $y = f(x)$ que verifica $f(0) = 1$. Calcula $f'(0)$.

14. Prueba que la ecuación $\log(xy) - x\cos(\pi y/2) = 0$ define una función $y = y(x)$ que cumple $y(1) = 1$. Halla $y''(1)$.

15. Calcula el vector velocidad y aceleración en $t = 0$ a la curva $(x(t), y(t))$ tal que con $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ dada por las ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} x^3 + e^x = t^2 + t + 1 \\ yt^2 + y^2t + y - t = 1 \end{cases}$$

16. Calcula y', y'' para las funciones $y = y(x)$ dadas por cada una de las ecuaciones siguientes, en los puntos indicados:

a) $2x^3 + y^3 - 5xy = 0;\quad y(1) = 2$ *b)* $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1;\quad y(1) = -\sqrt{3}/2$
c) $y^2\log x + e^{xy} = 1;\quad y(1) = 0$ (d) $xy\,\mathrm{sen}(xy) = \pi/2;\quad y(\pi) = 1/2$

Calcula también la recta tangente a cada curva en el punto correspondiente.

17. Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden de las funciones $z = z(x,y)$ dadas por cada una de las ecuaciones siguientes, en los puntos indicados. Calcula también el plano tangente a cada una de las superfícies en el punto correspondiente.

(a) $z^3 + xz + y = 0; z(-2,1) = 1$
(b) $x^5 + xy^2 + yz = 5; z(1,-1) = -3$
(c) $x^3 + y^3 + z^3 = 5xyz; z(2,1) = 1$
(d) $(x+y+z)z^2 + x^2 + y^2 = 5; z(-2,1) = 1$
(e) $x^2 + 2xy + z^2 = 1, z(0,-1) = 1$
(f) $2x + \cos(y+z) = 0, z(0,0) = \pi/2$
(g) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z(0,0) = -1$
(h) $z = e^x\,\mathrm{sen}(y+z), z(1,0) = e$

18. (a) Demuestra que la ecuación $xy - z\log z = 0$ define una función $z = z(x,y)$ tal que $z(0,0) = 1$.

(b) Calcula $z_x(0,0)$ y $z_y(0,0)$.

(c) Calcula las derivadas segundas de z, y determina si z tiene en $(0,0)$ un extremo relativo.

19. Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden de las funciones $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ dadas por cada una de las ecuaciones siguientes, en los puntos indicados:

a) $xu + yv - uv = 1$, $yu - xv + uv = 0$; $u(1,-1) = 1/3$, $v(1,-1) = -1/2$
b) $xu + \mathrm{sen}\,v = \pi/2$, $yv + \cos u = 0$; $u(1,1) = \pi/2$, $v(1,1) = 0$
c) $xy(u+v) + (x+y)uv = -2$, $x + y + u + v = 2$; $u(1,1) = 1$, $v(1,1) = -1$
d) $x^3 + y^3 + u^3 + v^3 = a^3$, $x + y + u + v = a$; $u(a,-a) = 0$, $v(a,-a) = a$
e) $x^2 - y^2 + u^2 + 2v^2 = 5$, $x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = -4$; $u(0,1) = 2$, $v(0,1) = -1$
f) $e^{x-u} + yv + 3 = 0$, $e^{y+v} - xu = 0$; $u(1,2) = 1$, $v(1,2) = -2$

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

20. Halla las direcciones u en las que existe $D_u f(a)$ para las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = (xy)^{1/3}$, $a = (0,0)$ *b)* $f(x,y) = |x+y|$, $a = (1,-1)$

21. Utiliza la diferencial para aproximar el cambio en $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cuando (x,y) se desplaza del punto $(1,1)$ al punto $(1.01, 0.97)$. Comprueba esta aproximación con el valor exacto.

22. En una zona de cierta montaña la altura sobre el nivel del mar en un punto con coordenadas (a,b) es $1000 + a^2 - 5ab - b^4$ m.

(a) Un esquiador se encuentra situado en el punto $(4,2)$. ¿En qué direcciones puede apuntar sus esquíes si desea deslizarse montaña abajo? Su compañero, que no lleva esquíes, quiere andar horizontalmente por la montaña. ¿En qué direcciones (si hay alguna) debe comenzar a moverse?

(b) ¿Hay puntos donde ninguna dirección vaya montaña abajo? En caso afirmativo, calcúlalos.

23. Una montaña tiene el aspecto de un paraboloide. Su ecuación es $z = 300 - (9x^2 + 16y^2)$. Halla la dirección de mayor pendiente en el punto $(4,3,12)$ y el ángulo de la pendiente en esa dirección.

24. La temperatura en un punto (x,y,z) es $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ ºC. Si una mosca está en el punto $(2,-1,2)$, ¿en qué dirección debería volar para alcanzar la mayor velocidad de decrecimiento de temperatura? Si la mosca vuela a v cm/sg. y las coordenadas están medidas en centímetros, ¿cuál es la mayor velocidad inicial de decrecimiento de temperatura que puede alcanzar?

25. El potencial eléctrico a una distancia x cm. de una carga de c unidades es $\frac{c}{x}$ unidades. Un instrumento para medir el potencial se mueve con una velocidad constante de una revolución por minuto sobre una circunferencia de radio 100 cm. En un punto C a mitad de camino entre el centro O y la circunferencia hay una carga. No hay ninguna otra carga suficientemente cerca para afectar al instrumento. Cuando el instrumento está en el punto P, para el que el ángulo COP es recto, la carga es de 5 unidades y su velocidad de variación es de 1 unidad por segundo. ¿Cuál es la velocidad de variación de la lectura del instrumento en ese instante?

26. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^3y + y^3}{x^4 + y^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$.

(a) Define $f(0,0)$ para que f sea continua.

(b) Con ese valor, calcula las derivadas parciales de f en todo punto.

(c) Calcula las derivadas direccionales de f en $(0,0)$ y en $(1,1)$. ¿Para qué puntos (a,b) se verifica la igualdad
$$\frac{\partial f}{\partial u}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot u$$
para todas las direcciones $u \in \mathbb{R}^2$?

(d) Estudia la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

27. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^3}{2x^2 - y^2 - xy}$ para $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

(a) Determina el dominio de f.

(b) Calcula el límite direccional de f en el origen a lo largo de la curva $y = x + x^2$.

(c) Estudia la continuidad y diferenciabilidad de f en el origen.

(d) Calcula $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, si existen.

28. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$ para $|x| \neq |y|$, $f(x,y) = \dfrac{3}{2}x$ para $|x| = |y|$.

(a) Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcula las derivadas parciales de f en todo punto.

(c) Calcula las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

(d) Estudia la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

29. Sea $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$ para $x \neq y$, $f(a,a) = 0$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

(a) Representa gráficamente las curvas de nivel de f.

(b) Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

(c) Calcula las derivadas parciales de f allá donde existan.

(d) Calcula la dirección de mayor crecimiento de f en cualquier punto (x,y) tal que $x \neq y$ y el valor de la derivada direccional en dicha dirección.

30. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{3x^2 - y^2 - 2xy}$ para $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

(a) Determina el dominio de f.

(b) Estudia la continuidad de f en el origen.

(c) Determina los vectores $u \in \mathbb{R}^2$ para los que existe $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ y calcula dicha derivada direccional en su caso. ¿Es cierta la igualdad $\nabla f(0,0) \cdot u = \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$?

(d) Estudia la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

31. Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \log(x^2 + y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$

(b) $f(x,y) = x \arctan \frac{x-y}{x+y}$, $x \neq -y$; $f(x,-x) = 0$

(c) $f(x,y) = x \operatorname{sen}\left(2 \arctan \frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$; $f(0,y) = 0$

(d) $f(x,y) = (x+y)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x+y}$, $x \neq -y$; $f(x,-x) = 0$

(e) $f(x,y) = x \arctan \frac{y}{x}$, $x \neq 0$; $f(0,y) = 0$

32. Sean las funciones f y g definidas del siguiente modo:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad f(x,y) = (e^{x+y}, x-y, x^2)$$

$$g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad g(u,v,w) = (u^w, \operatorname{sen}(v+w)).$$

Prueba que f es diferenciable en $(0,0)$ y que g lo es en $f(0,0)$. Calcula $D(g \circ f)(0,0)$.

33. Comprueba que cada una de las funciones siguientes verifica la ecuación indicada:

a) $f(x,y) = e^{xy} + \operatorname{sen}(x+y) \quad xD_1f(x,y) - yD_2f(x,y) = (x-y)\cos(x+y)$

b) $g(x,y,z) = \cos\left(\dfrac{x+y}{2z}\right) \quad xD_1g(x,y,z) + yD_2g(x,y,z) + zD_3g(x,y,z) = 0$

34. Una función $u = f(x,y)$ se llama armónica si verifica la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, donde el operador laplaciano Δ se define

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Decide si es armónica cada una de las funciones siguientes:

(a) $u = x^3 - 3xy^2$ (c) $u = x^2 + y^2$ (e) $u = e^x \operatorname{sen} x$

(b) $u = x^2 - y^2$ (d) $u = xy$ (f) $u = \operatorname{sen} x \operatorname{Ch} y$

35. Encuentra la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ si se hace el cambio a coordenadas

(a) polares en $\mathbb{R}^2$ (b) cilíndricas en $\mathbb{R}^3$ (c) esféricas en $\mathbb{R}^3$.

36. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verificando la ecuación

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{12.1}$$

Encuentra la forma de dicha ecuación en coordenadas polares.

37. Sea g una función derivable de una variable. Comprueba que la función $f(x,y) = g(x/y)$ satisface la ecuación diferencial (12.1).

38. Demuestra que la función $z = y\phi(x^2 - y^2)$ satisface la ecuación:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

39. Supongamos que f satisface la ecuación bidimensional de ondas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

y definamos $F(r,\theta,t) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, t)$. Demuestra que entonces F satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right).$$

40. Transforma la ecuación que define la vibración de una cuerda $\omega = \omega(x, t)$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

haciendo el cambio de variables $u = x - at$, $v = x + at$.

41. Transforma la ecuación que verifica la función $u = u(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - cu = F(x, t)$$

haciendo el cambio $v(y, t) = e^{-ct} u(y - bt, t)$.

42. Cierta magnitud es función de la posición en el plano. Se sabe que, respecto de las coordenadas polares r y θ, la función verifica la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\operatorname{sen} \theta \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$$

Encuentre la ecuación en derivadas parciales que verifica la función respecto de las coordenadas cartesianas x e y.

43. Dada la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, halla las derivadas parciales respecto de las variables r, θ, φ al hacer el cambio a coordenadas esféricas $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$, $z = r \operatorname{sen} \varphi$

44. Calcula las derivadas de segundo orden de

(a) $f(x, y) = xe^y + y \log x$ (b) $f(x, y, z) = xyz + ze^x$

45. Determina los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los que la ecuación $x^2 + bxy + y^3 - 9 = 2b$ define una función $y = y(x)$ que verifique $y(1) = 2$. Halla el valor de b que hace que dicha función implícita alcance un máximo en $x = 1$.

46. Halla la recta tangente a la curva $x^5 + 4xy^3 - 3y^5 = 2$ en el punto $(1, 1)$.

47. Determina los puntos de la superficie $(y + z)^2 + (z - x)^2 = 16$ en los que la normal es paralela al plano YZ. Halla el plano tangente a esta superficie en el punto $(1, 3, 1)$.

48. Consideremos la ecuación

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + 6z - z^2 = 0 \tag{12.2}$$

y $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ cualquier punto que la verifique.

(a) Prueba que existe una función $z = z(x, y)$ definida en un entorno del punto (x_0, y_0) que verifica (12.2) y $z(x_0, y_0) = z_0$.

(b) Encuentra una expresión para las derivadas parciales de primer y segundo orden de z.

(c) Encuentra los puntos críticos de z y estudia si son extremos relativos.

49. Determina el dominio en que puede asegurarse que el sistema

$$\begin{cases} u + v + w - x = 0 \\ u^2 + v^2 + w^2 - y = 0 \\ u^3 + v^3 + w^3 - z = 0 \end{cases}$$

define a u, v, w como funciones implícitas de x, y, z. Comprueba que $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0) = (2, 6, 8, 1, 2, -1)$ está en ese dominio y calcula además $D_1 u$, $D_1 v$ y $D_1 w$ en $(2, 6, 8)$.

Problemas Tema 13

Extremos de funciones de varias variables

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Encuentra los extremos relativos en $\mathbb{R}^2$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

(b) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$

(c) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$

(d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

(e) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + xy + 5$

(f) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3xy - x - 2y + 2$

(g) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 3$

(h) $f(x,y) = e^{-x^2+ay^2}$ (para $a = -1, 0, 1$)

(i) $f(x,y) = e^{xy} - 2xy$

(j) $f(x,y) = (2x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$

(k) $f(x,y) = x^2 + x^2y + y^2$

(l) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy + 8a^4$

(m) $f(x,y) = xye^{x+2y}$

(n) $f(x,y) = x^4 - 2px^2 - y^2 + 3$

2. Halla los valores máximos y mínimos que alcanza cada uno de los siguientes campos escalares sobre la curva correspondiente:

a) $f(x,y) = xy$	$x^2 + y^2 + xy = 4$
b) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 20x + 20y + 10$	$x^2 + y^2 + xy = 12$
c) $f(x,y) = x^2 + y^2$	$y + x^2 = 1$
d) $f(x,y) = x + y$	$4x^2 + y^2 = 16$

3. Halla los valores máximos y mínimos que alcanza cada uno de los siguientes campos escalares en el recinto correspondiente:

a) $f(x,y) = 3x^2y^2 + 2x^3 + 2y^3$	$x^2 + y^2 \leq 4$	*d)* $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$	$x^2 + y^2 \leq 4$
b) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$	$x^2 + y^2 \leq 1$	*e)* $f(x,y) = x^2y^2$	$x^2 + 4y^2 \leq 24$
c) $f(x,y) = y^2 - x^2$	$x^2 + y^2 \leq 1$	*f)* $f(x,y) = xy$	$-1 \leq x, y \leq 1$

4. (a) Encuentra todos los extremos relativos de la función $f(x,y) = xy^2$ en el recinto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$.

(b) Encuentra los extremos absolutos de f en el recinto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

5. Encuentra los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ en el recinto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \leq 3\}.$$

6. La temperatura sobre el disco de centro el origen y radio 2 es $T(x,y) = x^2 - xy + y^2$. Calcula los puntos donde se alcanzan las temperaturas extremas.

7. En un campo de fuerzas la componente en la dirección del eje OX de la resultante aplicada a un cuerpo situado en el punto (x,y) vale

$$f(x,y) = x^2 + 36x + 2 - (x - 2y)^2.$$

Si un cuerpo se ha de mover sobre la recta $x + y = 1$, calcula el punto en que la componente de la fuerza es mínima, dentro del círculo $x^2 + y^2 \leq 3$.

8. Halla la distancia del punto $(1,0)$ a la parábola $y^2 = 4x$.

9. Halla la distancia del origen a la parábola $y = x^2 - 1$.

10. Halla la distancia máxima y mínima del origen a la curva

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \\ 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

11. Calcula el máximo y mínimo absoluto de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ sobre la curva

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 2x\}$$

intersección de una esfera y un cilindro.

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

12. Dada la ecuación

$$x \log z + y \log x + z \log y = 0$$

(a) Demuestra que dicha ecuación define una función $z = z(x,y)$ tal que $z(1,1) = 1$.

(b) Calcula $z_x(1,1)$ y $z_y(1,1)$.

(c) Calcula las derivadas de segundo orden de z en $(1,1)$.

(d) Prueba que la función $w(x,y) = xy + z(x,y)$ tiene un mínimo relativo en $(1,1)$.

13. Determina los extremos absolutos de la función $f(x,y) = \dfrac{4xy}{(x^2+1)(y^2+1)}$ en la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

14. Encuentra los extremos absolutos de $f(x,y) = 2x^2 + y$ en el recinto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ y \leq x^2\}.$$

15. Halla los extremos absolutos de $f(x,y,z) = x^2 + y - z^2$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

16. Calcula los extremos absolutos de $f(x,y,z) = xy + z$ en el conjunto $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

17. Calcula los extremos absolutos de la función $f(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ sobre la curva intersección del plano $x + y + z = 3$ con la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 11$.

18. Halla los valores máximos y mínimos que alcanzan los siguientes campos escalares, cuando (x, y, z) recorre la superficie correspondiente:

a) $f(x, y, z) = 100 - xy - xz - yz$	$x + y + z = 10$
b) $f(x, y, z) = x + y + z$	$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
c) $f(x, y, z) = x^2 - yz$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
d) $f(x, y, z) = x^2 + y - z^2$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$
e) $f(x, y, z) = x(y + z)$	$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y + z = 1.$

19. Halla el máximo de la función $x^2y^2z^2$ en la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Como aplicación demuestra que para todos $a, b, c > 0$,

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{1}{3}(a + b + c).$$

20. Una caja rectangular descansa sobre el plano OXY, con dos de sus aristas sobre los ejes OX y OY. Halla el volumen máximo de la caja si el vértice opuesto al origen pertenece al plano $6x + 4y + 3z = 24$.

21. Calcula la distancia máxima y mínima de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0$ al origen.

22. Dados $a > b > 0$, calcula la distancia mínima y máxima del punto $(0, b)$ a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

23. Calcula la distancia mínima del punto $(2, -1)$ a las curvas

(a) $x + 2y = 1$ (b) $y^2 = x$ (c) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

24. Halla el punto de la curva intersección del plano $x + y + z = 10$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$ que a) está más próxima al origen; b) está a altura máxima.

25. Halla los puntos de la circunferencia intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$ cuya distancia al punto $(0, 3, 3)$ sea máxima y mínima.

26. Determina los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x$ sobre la curva

$$\begin{cases} z = x + y \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8 \end{cases}$$

27. (a) Dados $a, b, c > 0$, y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ del elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ con coordenadas positivas, calcula la ecuación del plano tangente a la superficie de dicho elipsoide en el punto P. Demuestra que los puntos de corte de dicho plano con los ejes coordenados tienen coordenadas no nulas $\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}$, resp.

(b) Encuentra el punto P del apartado anterior tal que el tetraedro de vértices el origen y las intersecciones del plano tangente al elipsoide en P con los ejes coordenados tenga volumen mínimo. Indica el valor mínimo del volumen. (El volumen del tetraedro es un sexto del producto de las longitudes de los segmentos de los ejes coordenados).

Problemas Tema 14

Integrales múltiples

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. En las siguientes integrales iteradas invierte el orden de integración:

(a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^{4-x} f(x,y)\,dy$

(b) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_x^{x^2} f(x,y)\,dy$

(c) $\displaystyle\int_{1/e}^1 dy \int_{-\log y}^{\sqrt{-\log y}} f(x,y)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_1^{e^x} f(x,y)\,dy$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)\,dy$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} dx \int_{\operatorname{sen} x}^{3\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy$

(g) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{y^{2/3}}^{(2-y)^2} f(x,y)\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{3-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_{-2|x|}^{|x|} f(x,y)\,dy$

2. Sea $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$, definida para $x, y > 0$.

(a) Prueba que f es integrable en su dominio de definición.

(b) Deduce el valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2-1}dx$.

3. Estudia la integrabilidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{y}{(1+x^2+y^2)^2}$. ¿Cuánto vale la integral doble de f?

4. Sea $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^3}$.

(a) Calcula las integrales iteradas de f en $(-\infty,+\infty) \times (1,+\infty)$.

(b) ¿Es f integrable en $(-\infty,+\infty) \times (1,+\infty)$? En caso afirmativo, calcula el valor de su integral.

5. Indica razonadamente si la función $f(x,y) = e^{-xy}$ es integrable en:

(a) $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$

(b) $\{(x,y) : 0 < x < y < x + x^2\}$

6. Demuestra que la función $f(x,y) = e^{-y}\operatorname{sen}(2xy)$ es integrable en $[0,1]\times[0,+\infty)$. Deduce que
$$\int_0^{+\infty} \frac{sen^2 y}{y} e^{-y}\,dy = \frac{\log 5}{4}$$

7. Consideremos el recinto $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2,\ 0\le y\le 1,\ x\ge 0\}$. Expresa el área de A mediante integrales iteradas, en ambos órdenes de integración, usando coordenadas cartesianas y coordenadas polares.

8. Describe el área del conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ en coordenadas polares, mediante integrales iteradas en ambos órdenes.

9. Calcula las siguientes integrales dobles:

(a) $\displaystyle\iint_A |y-\operatorname{sen} x|\,dxdy$, $A=[0,\pi]\times[0,1]$

(b) $\displaystyle\iint_B f(x,y)\,dxdy$, $B=[0,1]^2$, $f(x,y)=\begin{cases} x, & x>y \\ y^2 & x\le y\end{cases}$

(c) $\displaystyle\iint_C x\,dxdy$, $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2x\}$

(d) $\displaystyle\iint_D e^{x/y}\,dxdy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^3\le x\le y^2,\ y\ge 0\}$

(e) $\displaystyle\iint_E e^{x+y}\,dxdy$, $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 1\}$

10. Expresa mediante integrales dobles, y calcula las áreas acotadas por las curvas:

(a) $xy=4,\ y=x,\ x=4$

(b) $y=x^2,\ 4y=x^2,\ y=4$

(c) $y=\log x,\ x-y=1,\ y=-1$

11. Sea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\le 1,\ 0\le y\le 2-x\}$. Calcula $\displaystyle\iint_A x\,dxdy$. Expresa la integral doble haciendo uso de las coordenadas polares.

12. Representa el recinto de integración correspondiente a la integral iterada
$$\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{dy}{\sqrt{x+y^2}}.$$

Invierte el orden de integración y calcula dicha integral.

13. Calcula el volumen de $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le x^2+y^2,\ x+y\le 1,\ x,y\ge 0\}$.

14. Calcula el volumen del sólido limitado por los cilindros $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$, el plano $z=0$ y el paraboloide $z=x^2+y^2$.

15. Utilizando coordenadas cilíndricas, calcula $\displaystyle\iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz$, en los siguientes casos:

a) $f(x,y,z)=x^2$ $\quad A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-1)^2\le 1,\ 4z^2\ge 3(x^2+y^2)\}$

b) $f(x,y,z)=(x^2+y^2)^3$ $\quad A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 2z\le 4\}$

16. Usando el cambio a coordenadas esféricas, calcula $\iiint_A z^2\,dxdydz$ con $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x^2+y^2+z^2 \le 2z,\ x \ge 0\}$.

17. Sea $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le |x|\}$. Calcula, mediante coordenadas cilíndricas, el volumen de M, así como la integral

$$\iiint_M \frac{z}{x^2+y^2}dxdydz$$

18. Para cada uno de los siguientes recintos, escribe su volumen usando coordenadas cilíndricas y esféricas:

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z^2,\ x^2+y^2 \le 2-z \le 2\}$

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2 \le 2-z^2\}$

(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1,\ x^2+y^2+(z-1)^2 \ge 1,\ x^2+y^2+(z+1)^2 \ge 1,\ |z| \le 1\}$

(d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \le 1\}$

(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le 3z\}$

19. Expresa el volumen del recinto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 16,\ x^2+y^2 \le 4,\ x,y,z \ge 0\}$ en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

20. Invierte el orden de integración (en *20q)*, $a \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ es el único tal que $\tan a = a$).

(a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^{\operatorname{arcsen} x} f(x,y)\,dy$

(b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\arccos y} f(x,y)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{\operatorname{tg} x}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy$

(d) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{\alpha(y)} f(x,y)\,dx$, donde $\alpha(y) = \min\{1, \log(1/y)\}$

(e) $\displaystyle\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\,dy$

(f) $\displaystyle\int_0^{\log 2} dy \int_{e^{-2y}}^{e^y} f(x,y)\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$

(i) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{x^2}^{4x-x^2} f(x,y)\,dy$

(j) $\displaystyle\int_4^5 dx \int_{12x}^{3x^2} f(x,y)\,dy$

(k) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{\pi} dx \int_{\operatorname{sen} x}^{3\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy$

(m) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{2x}^{x+2} f(x,y)\,dy$

(n) $\displaystyle\int_1^4 dx \int_{x^2-4x+3}^{x-1} f(x,y)\,dy$

(o) $\displaystyle\int_0^{\log 6} dy \int_{(5-\sqrt{1+4e^y})/2}^{(5+\sqrt{1+4e^y})/2} f(x,y)\,dy$

(p) $\displaystyle\int_0^{101} dx \int_{x+1}^{2x+2} f(x,y)\,dy$

(q) $\displaystyle\int_{\pi}^{a} dy \int_{\operatorname{tg} x}^{x} f(x,y)\,dx$

21. Calcula razonadamente el valor de las integrales siguientes, en el caso de que existan:

$$\iint_{(0,e)\times(0,+\infty)} \frac{x\log x}{1+(xy)^2}\,dx\,dy, \qquad \iint_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} \frac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

22. Consideremos el recinto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2+y^2 \leq 2x\}$ y la función $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$. Demuestra que la función f es integrable en A y calcula, mediante cambio a coordenadas polares, el valor de la integral de f en A.

23. Consideremos la función $f(x,y) = e^{-xy}$. Estudia su integrabilidad en los siguientes recintos:

$$A = (0,+\infty)\times(0,1), \qquad B = (0,+\infty)\times(1,2), \qquad C = (0,+\infty)\times(0,+\infty).$$

Deduce el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx.$$

24. Sea $f : (0,+\infty)\times(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} y - e^{-x}, & \text{si } 0 < y < e^{-x},\ x > 0 \\ \dfrac{e^{-x}}{y^2(1+x^2)}, & \text{si } y > e^{-x},\ x > 0 \end{cases}$$

Prueba que f es integrable en $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ y calcula el valor de su integral.

25. Determina los dominios cuyas áreas vienen dadas por las integrales iteradas siguientes, e invierte el orden de integración:

$$\int_0^a dx \int_0^x dy, \qquad \int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \qquad \int_1^e dx \int_0^{\log x} dy$$

26. Halla la masa y el centro de masas de la lámina de densidad $\rho(x,y) = x^2$ que ocupa la región del plano limitada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = x$.

27. Sean $a > b > c > 0$. Calcula el volumen de la porción de la bola $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ comprendida entre los planos $z = b$ y $z = c$, usando coordenadas cilíndricas y esféricas.

28. Se considera $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2+y^2 \leq z\}$.

(a) Representa A.
(b) Expresa el volumen de A usando coordenadas cilíndricas y esféricas.
(c) Calcula el volumen de A.

29. Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ tal que su volumen se calcula mediante la integral iterada

$$\operatorname{vol}(A) = \int_0^1 dy \int_0^y dx \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz$$

Describe el conjunto A, escribe la integral anterior en los órdenes de integración $dz\,dy\,dx$ y $dx\,dz\,dy$, y calcula su volumen.

30. Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z \le 4\}$. Consideremos la integral triple

$$\iiint_A z dx dy dz$$

Realiza en ella el cambio a coordenadas cilíndricas, escribiendo la integral anterior en el orden $d\theta\, dr\, dz$, y a coordenadas esféricas, escribiendo la integral anterior en el orden $d\theta\, d\varphi\, dr$. Usa las coordenadas cilíndricas para obtener el valor de dicha integral.

31. Para cada uno de los siguientes recintos, escribe su volumen usando las coordenadas correspondientes, mediante integrales iteradas en el orden pedido:

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 2z \le 2\}$	$d\theta\, d\varphi\, dr$
b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2z\}$	$d\theta\, d\varphi\, dr$, $d\theta\, dr\, d\varphi$
c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 2az,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 3a^2\}$	$d\theta\, dz\, dr$, $d\theta\, dr\, dz$
d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le y^2,\ y + z \le 2,\ 0 \le x \le 2,\ y \ge 0\}$	$dz\, dx\, dy$, $dz\, dy\, dx$, $dx\, dy\, dz$
e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \le x^2 + y^2 \le 2 - z \le 2\}$	$d\theta\, dz\, dr$, $d\theta\, dr\, dz$

32. Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le b^2,\ 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

(a) Escribe el volumen de A usando coordenadas cilíndricas expresándolo como integrales iteradas en el orden $d\theta\, dr\, dz$.

(b) Calcula el volumen de A usando coordenadas esféricas.

33. Expresa el volumen del recinto $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 2,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x,y,z \ge 0\}$ en coordenadas esféricas en el orden $d\theta\, dr\, d\varphi$.

34. Halla el centro de masa de un tetraedro de densidad constante y vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

35. Halla la masa de la porción del sólido Q dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 \le 16$, situado por encima del plano XY. La densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al plano XY.

Problemas Tema 15

Integrales de línea

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Una partícula se mueve por el espacio $\mathbb{R}^3$ siguiendo la trayectoria

(a) $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$
(b) $\beta(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 2]$
(c) $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2})$, $t \in [0, 1]$

Calcula en cada caso el vector tangente en cada instante, su velocidad y aceleración, así como el espacio recorrido por la partícula.

2. Obtén una parametrización regular a trozos de cada uno de los siguientes caminos:

(a) Cuadrado de vértices $(0,0), (3,0), (3,3), (0,3)$, recorrido en sentido antihorario.
(b) Segmento que une el punto $(0,0)$ con el punto $(3,9)$.
(c) Arco de circunferencia de centro el origen y radio 2 que va desde el punto $(2,0)$ a $(0,-2)$ en sentido antihorario.
(d) Triángulo de vértices $(0,0), (1,0), (0,1)$ recorrido en sentido antihorario.

3. Encuentra una parametrización de la curva

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\, z = 1\}$.
(b) intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el plano $y + z = a$.

4. Calcula las integrales de líneas sobre los caminos especificados:

(a) $\displaystyle\int_C 4xy\,ds$ siendo C el cuadrado $|x| + |y| = 1$ recorrido en sentido antihorario.

(b) $\displaystyle\int_C 8xyz\,ds$ donde $C \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 12t \\ z = 5t \end{cases}, \; t \in [0,2]$.

(c) $\displaystyle\int_C (x + 4\sqrt{y})\,ds$ con C dada en 2a).

(d) $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2)\,ds$ con C dada en 2c).

(e) $\displaystyle\int_C (x + 4\sqrt{y})\,ds$ con C dada en 2d).

5. Determina si alguno de los siguientes campos vectoriales es conservativo, y en caso afirmativo, halla una función potencial del mismo:

(a) $f(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$

(b) $f(x,y) = \left(\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2} \right)$

(c) $f(x,y) = (2x-2y, -2x)$

(d) $f(x,y,z) = (\operatorname{sen} y, -x\cos y, 1)$

(e) $f(x,y,z) = e^z(y,x,1)$

(f) $f(x,y,z) = (3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2)$

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^xy^2+1, 2e^xy)$.

(a) Comprueba, aplicando la definición, que f es conservativo en $\mathbb{R}^2$.

(b) ¿Cuánto vale la integral de f a lo largo de un camino regular a trozos $r(t)$ que une los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$?

7. Determina razonadamente el valor de a para que el campo

$$f(x,y,z) = (axy - z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2)$$

sea conservativo en $\mathbb{R}^3$. Para este valor de a calcula el valor de la integral curvilínea de f en la curva $r(t) = \left(\sqrt{1+t}, \log\left(1+(e-1)t/8\right), t/8\right)$, $0 \le t \le 8$.

8. Calcula la divergencia de los campos vectoriales:

(a) $F(x,y,z) = (\operatorname{sen} x, \cos y, z^2)$

(b) $F(x,y,z) = (\log(x^2+y^2), xy, \log(z^2+y^2))$

9. Calcula el valor de la integral de linea $\displaystyle\int_C F\cdot\tau\, ds$, en los siguientes casos:

(a) $F(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$ a lo largo de las siguientes curvas:

i. $r(t) = (t, \frac{3}{2}(t-2))$, $0 \le t \le 2$;

ii. la poligonal que une $(0,3), (3,3), (3,0)$.

(b) $F(x,y,z) = (-y, x, 3xz^2)$ a lo largo de las siguientes curvas:

i. $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \le t \le \pi$.

ii. $r(t) = (1-2t, 0, \pi t)$, $0 \le t \le 1$.

10. Calcula $\displaystyle\int_C 2xydx + (x^2+y^2)dy$ a lo largo de las siguientes curvas:

(a) Cuadrado de vértices $(1,-1), (-1,-1), (-1,1), (1,1), (1,-1)$ en sentido horario.

(b) Semicircunferencia de centro el origen y radio uno recorrida desde el punto $(-1,0)$ al punto $(1,0)$, en sentido horario.

11. Calcula $\displaystyle\int_C zydx + xzdy + xydz$ a lo largo de las poligonales que unen:

(a) $(0,0,0), (0,0,1), (1,1,1)$ (b) $(0,0,0), (0,1,0), (1,1,1)$ (c) $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,1)$

12. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x,y) = (-x, -2y)$ al mover un objeto a lo largo de la curva $y = x^3$ desde el punto $(0,0)$ al punto $(2,8)$.

13. Calcula $\int_C e^x \operatorname{sen} y \, dx + e^x \cos y \, dy$ a lo largo de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

14. Sea $F(x,y) = (xy, x+y)$. Calcula $\oint_C F \cdot \tau \, ds$ donde C es el contorno del triángulo de vértices $(0,0), (1,0), (1,1)$, recorrido en sentido antihorario.

15. Calcula la circulación del campo $f(x,y) = (xy, x+y)$ a lo largo de la frontera de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, la recta $x + y = 2$ y el eje OY, recorrida en sentido positivo:

(a) Calculando directamente la integral curvilínea.

(b) Convirtiéndola en una integral doble.

16. Calcula la integral $\oint_C x^2 y dx + (x^2 + y^2) dy$, donde C es la frontera, recorrida en sentido positivo, de la región acotada D comprendida entre la parábola $y = x^2$, la recta $y = 1$ y el eje OY, donde $x > 0$,

(a) como tal, la integral de línea de un campo vectorial;

(b) convirtiéndola en una integral doble usando el teorema de Green.

17. Utiliza una integral de línea para calcular el área de la región

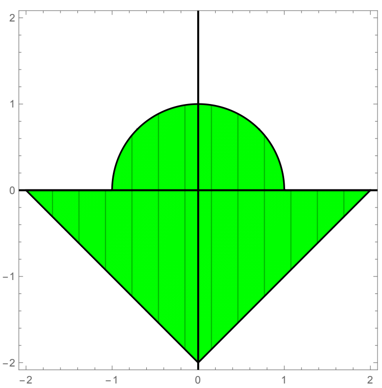
(a) acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$;

(b) limitada por las gráficas de $y = 2x + 1$, $y = 4 - x^2$;

(c) triángulo limitado por las gráficas de $x = 0$, $2x - 3y = 0$, $x + 3y = 9$.

18. Utilizando el campo $f(x,y) = (-y, x)$ y el teorema de Green calcula el área de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2,\ x < y^2,\ 0 \le y\}$.

19. Se considera el recinto B de $\mathbb{R}^2$



$$\begin{aligned} B =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\} \\ & \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le 0,\ |x| \le 2 + y\} \end{aligned}$$

Comprueba el Teorema de Green en B con el campo vectorial $f(x,y) = (-y, x)$.

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

20. Estudia si cada uno de los siguientes campos es conservativo y, en caso afirmativo, calcula una función potencial del mismo:

(a) $F(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{y}, -\dfrac{x}{y^2}, 2z - x\right)$

(b) $F(x,y) = (e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y)$

21. Sea el campo vectorial $f(x,y) = (ax^2y + y^3 + 1, 2x^3 + bxy^2 + 2)$. ¿Para qué valores de a y b es conservativo? Para estos valores de a y b, encuentra una función potencial y calcula la integral de línea $\int_C f \cdot \tau \, ds$, donde C es la curva parametrizada por $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi$.

22. Sea $f(x,y,z) = (axyz + cz^2, bx^2z, x^2y + axz)$.

(a) Determina $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que el campo f tenga un potencial.

Consideremos f con los valores hallados en el apartado anterior.

(b) Encuentra un potencial para f.

(c) Calcula la circulación del campo f a lo largo de la curva dada por la parametrización

$$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} 2t,\ z = 3t,\ t \in (0, 2\pi)$$

(d) Sea $h(x,y,z) = (yz, 0, 0)$. Calcula razonadamente la circulación del campo $f + h$ a lo largo de la poligonal que une los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$ y $(1,1,1)$.

23. (a) Prueba razonadamente que el campo vectorial

$$f(x,y) = \left(\frac{y}{x+y}, \log(x+y) + \frac{y}{x+y}\right)$$

es conservativo en su dominio de definición.

(b) Calcula una función potencial de f en su dominio de definición.

(c) Calcula la circulación de f a lo largo de la curva $r(t) = (t, t^3 - 2t^2 + t + 1)$, $t \in [0,1]$.

24. Se considera el campo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$f(x,y,z) = (ayz, bxz, cxy).$$

(a) Determina todos los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ que hacen que f sea conservativo.

(b) Para dichos valores, calcula un potencial para f.

(c) Sea C_θ un meridiano de la esfera de centro el origen y radio 1 que une el polo norte con el polo sur. Determina la circulación de f a través de C_θ, para los valores

i. $a = b = c = 1$

ii. $a = 1, b = 1, c = 0$

(d) Explica el resultado anterior dependiendo de si f es conservativo o no.

25. Para el campo vectorial del apartado 20b) calcula la integral $\int_C F \cdot \tau \, ds$ donde C es el trozo de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ que va desde el punto $(2, 0)$ hasta el punto $(0, 3)$ recorrida en sentido antihorario.

26. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (9x^2y^2, 6x^3y - 1)$ al mover el objeto desde el punto $P(0, 0)$ al punto $Q(5, 9)$.

27. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x, y, z) = (x, y, -5z)$ al mover un objeto a lo largo de la curva $r(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, t)$ desde el punto $(2, 0, 0)$ al punto $(2, 0, 2\pi)$.

28. Sea el campo vectorial $F(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2} \right)$.

(a) Prueba que el campo vectorial $F(x, y)$ es conservativo y calcula una función potencial para el mismo.

(b) Calcula la integral $\oint_C F \cdot \tau \, ds$, siendo C el triángulo de vértices $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, en sentido antihorario.

29. Calcula el valor de la integral $\int_C y^2 dx - x^2 dy$, a lo largo de la curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, recorrida en sentido antihorario, donde

$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x, y \geq 0\}$
$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [0, 1]\}$
$C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = 0\}$.

30. Calcula la integral de línea del campo vectorial $f(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$ entre los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1/2, 1/2)$,

(a) a lo largo del segmento de recta que los une;

(b) a lo largo del arco de curva $x = t, y = t^2/2, z = t^4/2$.

Prueba que existe función potencial y calculala.

31. Deseamos calcular la integral de línea del campo vectorial $f(x, y, z) = (x^2 + y, y^2 + x, ze^z)$, para las siguientes trayectorias, desde el punto $A(1, 0, 0)$ al $B(1, 0, 1)$.

(a) El segmento de recta que los une.

(b) El arco de hélice $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t/(2\pi))$.

(c) El eje OX desde el $(1, 0, 0)$ hasta el origen y luego el arco de parábola $z = x^2$

Representa las trayectorias en $\mathbb{R}^3$. Calcula dichas integrales de línea. ¿Es conservativo el campo f? En caso afirmativo, calcula una función potencial y comprueba los resultados obtenidos en los cálculos anteriores.

32. Dado el campo vectorial $F(x, y, z) = (y \operatorname{sen} z, x \operatorname{sen} z, xy \cos z)$,

(a) estudia si es conservativo;

(b) calcula $\int_C F \cdot \tau \, ds$ siendo C el arco de curva intersección de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y el plano $z = x - y$ desde $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0)$ hasta $(2, 1, 1)$.

33. Consideremos el campo vectorial $f(x,y,z) = (6xy\cos z, 3x^2\cos z, -3x^2 y \operatorname{sen} z)$. ¿Es conservativo? En caso afirmativo, calcula su potencial. Si $r(t) = (\cos 3t, \operatorname{sen} 3t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi/2$, ¿cuánto vale la integral de línea del campo f a lo largo de la curva descrita por r?

34. Se considera el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ $f(x,y,z) = (ay\operatorname{sen} bz, ax\operatorname{sen} bz, xy\cos bz)$.

(a) Determina los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los que f es conservativo.

(b) Para los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ del apartado 34a, encuentra un potencial para f.

(c) Calcula $\int_C f \cdot \tau \, ds$ siendo C la espiral $\alpha(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \theta)$ para

i. $a = b = 1$

ii. $a = 1, b \neq 1$

35. Sea el campo vectorial $F(x,y) = (\alpha e^x \cos y, (\beta - 2)e^x \operatorname{sen} y)$

(a) ¿Qué condición deben cumplir los parámetros α y β para que F sea un campo vectorial conservativo?

(b) Sean $\alpha = \beta = 1$. Calcula $\oint_C F(x,y) \cdot \tau \, ds$, siendo C la elipse dada por $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\operatorname{sen} t \end{cases}$ recorrida en sentido antihorario, con $0 \leq t \leq 2\pi$.

36. Calcula por una integral curvilínea el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

37. Calcula $\int_C Pdx + Qdy$, donde $P(x,y) = xe^{-y^2}$, $Q(x,y) = -x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2+1}$, y C es la frontera del cuadrado de lado $2a$ determinado por las desigualdades $|x| \leq a$, $|y| \leq a$, orientado positivamente.

38. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2y,\ x \geq y^2\}$. Utilizando el campo vectorial $f(x,y) = (-y, x)$ y el teorema de Green, calcula el área de A.

39. Utilizando el campo vectorial $f(x,y) = (-y,x)$ y el teorema de Green, calcula el área del conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1,\ x - \frac{3}{2} \leq y \leq x + \frac{3}{2}\}$$

Indica la parametrización del borde.

40. Sea un campo vectorial $f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$, tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 5 + \alpha, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \alpha^2 - 1.$$

Determina razonadamente los valores de α para los que el campo f es conservativo en $\mathbb{R}^2$. Para $\alpha = 0$, calcula la integral curvilínea $\int_C Pdx + Qdy$, para los casos en que C es:

(a) el perímetro del rectángulo $\{(x,y) \in R^2 : -3 \leq x \leq 3,\ -2 \leq y \leq 5\}$ con la orientación antihoraria.

(b) el perímetro del triángulo con vértices $A(-1,-1)$, $B(2,-1)$ y $H(0,3)$ con la orientación horaria.

41. Usando el teorema de Green, calcula la integral de línea del campo vectorial $f(x,y) = (x^3, 4x)$ a lo largo de la trayectoria poligonal que une los puntos $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(-2,1)$, $(-2,-1)$, $(-1,-1)$, relacionando esa integral de línea con la integral de línea a lo largo de la trayectoria vertical que va desde $(-1,-1)$ hasta $(-1,0)$.

42. Se considera el campo vectorial para $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = \left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

(a) ¿Es f cerrado?

(b) Comprueba que existe un potencial para f.

(c) Calcula $\displaystyle\oint_{C_1} f \cdot \tau \, ds$ siendo C_1 la circunferencia $x^2+y^2=1$.

(d) Calcula $\displaystyle\int_{C_2} f \cdot \tau \, ds$ siendo C_2 la espiral $x = \dfrac{1}{t+1}\cos t$, $y = \dfrac{1}{t+1}\operatorname{sen} t$, $t \in [0,a]$.

(e) Estudia el comportamiento del valor de la integral de línea anterior cuando $a \to +\infty$.

43. Se considera el campo vectorial para $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = \left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

(a) ¿Es f cerrado?

(b) Comprueba que existe un potencial para f.

(c) Calcula $\oint_{C_1} f \cdot \tau \, ds$ siendo C_1 la circunferencia $x^2+y^2=1$.

(d) Calcula $\int_{C_2} f \cdot \tau \, ds$ siendo C_2 la espiral $x = \dfrac{1}{t+1}\cos t$, $y = \dfrac{1}{t+1}\operatorname{sen} t$, $t \in [0,a]$.

(e) Estudia el comportamiento del valor de la integral de línea anterior cuando $a \to +\infty$.

44. Determina el momento de inercia respecto al eje OX

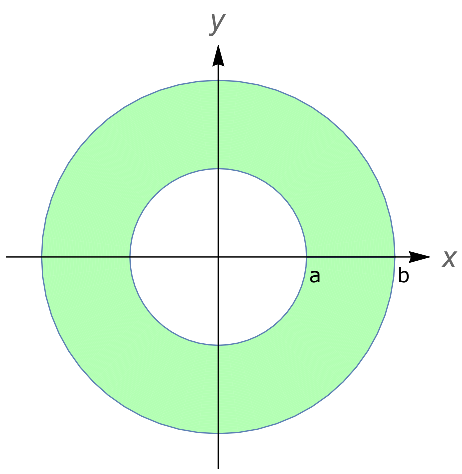
$$\iint_D y^2 dx\, dy$$

de una arandela homogénea de densidad 1 y radios a y b,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\}$$

usando el teorema de Green. Para ello, encuentra previamente un campo $f = (P,Q)$ tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2.$$



Problemas Tema 16

Integrales de superficie

A. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

1. Obtén una parametrización de las siguientes superficies:

(a) $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$

(b) $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$

(c) $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$

2. Obtén una parametrización de las siguientes superficies, así como la ecuación del plano tangente en el punto indicado en cada caso:

(a) $x + y + z = 0$, $P = (1, 0, -1)$.

(b) $x^2 + z^2 = a^2$, $P = (a, 1, 0)$.

(c) $z = 2 - x^2 - y^2$, $P = (1, 1, 0)$.

(d) $y = z^2$, $P = (2, 1, 1)$.

(e) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$, $P = (0, 0, 1)$.

3. Calcula el área de las siguientes superficies:

(a) región que en el plano $x + y + z = 1$ determina el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(b) porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = y$.

(c) porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ comprendida entre los planos $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(d) porción del cilindro parabólico $z = y^2$ sobre el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

4. Calcula la integral de superficie del campo escalar f sobre la superficie S:

(a) $f(x, y, z) = z^2$, S casquete de $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ para $0 \leq z \leq 1$.

(b) $f(x, y, z) = xy$, S $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el primer octante.

(c) $f(x, y, z) = z$, S $z = 1 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$.

(d) $f(x, y, z) = x^2yz$, S casquete más pequeño en que el plano $y + z = 1$ divide a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5. Calcula las coordenadas del centro de masas de un casquete esférico homogéneo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

6. Calcula la integral de superficie del campo vectorial F sobre la superficie:

(a) $F(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y,-y,1)$, S $z = 1 - x^2 - y^2, 0 \le z \le 1$.

(b) $F(x,y,z) = (\operatorname{sen} xyz, z(x-y), x^2+y^2)$, S porción del plano $y = 2z$ limitado por el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(c) $F(x,y,z) = (xz, yz, z^2)$, S primer octante del elipsoide $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$.

(d) $F(x,y,z) = (x-y, y-z, x-y)$, S frontera de $[0,1]^3$.

7. Sea Q la región sólida comprendida entre el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$. Comprueba el teorema de la divergencia para $F(x,y,z) = (2z, x, y^2)$.

8. Sea Q la región sólida limitada por la esfera por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Halla el flujo al exterior del campo vectorial $F(x,y,z) = (2x^3, 2y^3, 2z^3)$ a través de la esfera.

9. Calcula las siguientes integrales de línea, usando el Teorema de Stokes:

(a) $\displaystyle\int_C (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz,$

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = a,\ x^2+y^2 = \frac{a^2}{4}\right\}.$$

(b) $\displaystyle\int_C (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz,$

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4y,\ x^2+y^2 = 2y\}.$$

(c) $\displaystyle\int_C ydx + zdy + xdz$, $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z+y = 1\}$.

10. Sea S la porción de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$ que se encuentra en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Dado el campo vectorial $F(x,y,z) = (xy, yz, zx)$, calcula el flujo exterior del rotacional $\nabla \times F$ a través de S

(a) directamente,

(b) utilizando el teorema de Stokes,

(c) aplicando el teorema de la divergencia.

11. Consideremos el sólido $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \le x^2+y^2,\ z \ge x^2+y^2\}$ y el campo vectorial $f(x,y,z) = (x,y,-2z)$.

(a) Calcula el volumen de M, utilizando coordenadas cilíndricas.

(b) Calcula el área de la superficie $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \le x^2+y^2,\ z = x^2+y^2\}$.

(c) Calcular el área de la superficie $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2+y^2,\ z \ge x^2+y^2\}$.

(d) Usando el Teorema de Gauss, calcula el flujo del campo f a través de la superficie B, orientada al exterior. 5. Encuentra, si es posible, un campo vectorial $g = (P, Q, 0)$ tal que su rotacional sea f. Mediante el Teorema de Stokes, comprueba el resultado obtenido en el apartado anterior.

12. Consideremos las superficies

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y,\ x^2 + y^2 \leq z\} \quad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x + y,\ x^2 + y^2 = z\}$$

(a) Parametriza ambas superficies y calcula el área de A.

(b) Comprueba el teorema de Gauss en el recinto encerrado por A y B y el campo vectorial $f(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$.

13. Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z + 1,\ z \leq 1,\ x \geq 0\}$. Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z + 1,\ z \leq 1,\ x \geq 0\}$ orientada hacia el exterior de A.

(a) Calcula el flujo del campo vectorial $f(x,y,z) = (-y, x, 2)$ a través de S directamente, indicando la orientación de S que utilices.

(b) Comprueba el resultado del apartado anterior usando el teorema de Gauss.

14. Sea A el volumen limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = x + 1$, $z = 0$.

(a) Calcula el volumen de A.

(b) Usando el teorema de Gauss, calcula el flujo del campo vectorial $f(x,y,z) = (x, 0, 0)$ a través de la superficie $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq x + 1$.

15. Sea S la superficie $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = y + 3$.

(a) Calcula el área de S.

(b) Sea el campo vectorial $f(x,y,z) = (x, 0, -z)$. Calcula el flujo de f a través de S, orientada de modo que el vector normal a la superficie mire hacia abajo.

(c) Indica como calcularías el flujo pedido por un método distinto al que hayas empleado.

16. Calcula el flujo de $f(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$ a través de la frontera de

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\}$$

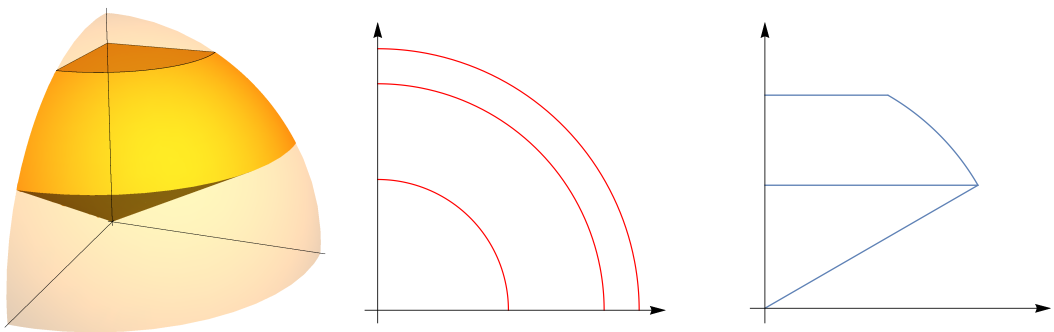
orientada al exterior de M:

(a) directamente;

(b) aplicando el Teorema de Gauss.

17. Se considera el sólido

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq 3z^2,\ 0 \leq z \leq \sqrt{3},\ x, y \geq 0\}$$



(a) Utiliza los gráficos anteriores para describir las proyecciones de M sobre OXY y OXZ.

(b) Escribe el volumen de M como integrales iteradas en las formas:

$$\operatorname{vol}(M) = \iint_{A_1} dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz + \iint_{A_2} dx\,dy \int_{z_3(x,y)}^{z_4(x,y)} dz$$

$$\operatorname{vol}(M) = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} dy + \int_{z_3}^{z_4} dz \int_{x_3(z)}^{x_4(z)} dx \int_{y_3(x,z)}^{y_4(x,z)} dy$$

(c) Calcula el volumen de M.

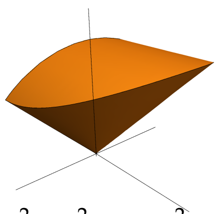
(d) Comprueba el resultado del apartado anterior mediante el teorema de Gauss aplicado al campo $h(x,y,z) = (x,y,z)$ en el volumen M.

(e) Calcula el flujo de $f(x,y,z) = (x^2, y^2, -2(x+y)z)$ a través de la superficie

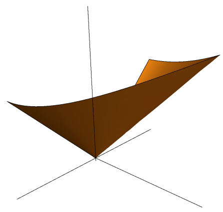
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ 1 \le z \le \sqrt{3},\ x,y \ge 0\}$$

orientada al exterior de M, usando el teorema de Stokes, buscando previamente un campo $g = (A,0,C)$ cuyo rotacional sea f.

18. Se consideran el sólido M y la superficie S dados por



$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \le 1,\ z^2 \ge x^2+y^2,\ y,z \ge 0\}$



$S = \{(x,y,z) \in M : z^2 = x^2+y^2\}$

(a) Expresa el volumen de M como integrales iteradas en las formas

$$\operatorname{vol}(M) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \int_{x_3}^{x_4} dx \int_{z_3(x)}^{z_4(x)} dz \int_{y_3(x,z)}^{y_4(x,z)} dy$$

(b) Calcula el volumen de M.

(c) Calcula el flujo de $f(x,y,z) = (y,z,-x)$ a través de la superficie S orientada al exterior de M: 1) directamente; 2) aplicando el Teorema de Gauss; 3) usando el teorema de Stokes, buscando previamente un campo $g = (A,B,0)$ cuyo rotacional sea f.

B. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

19. Calcula el área de las siguientes superficies:

(a) superficie esférica de centro $(0,0,a)$ y radio a contenida en el paraboloide $z = x^2+y^2$.

(b) del elipsoide $x^2+y^2+2z^2 = 1$.

(c) de la superficie cilíndrica $x^2+y^2 = ay$ limitada por la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio $a > 0$.

(d) de la superficie del cono $x^2 + y^2 = 4z^2$ limitada por $x^2 + y^2 = 4x$.

(e) del cono $x^2 = y^2 + z^2$ que está dentro del cilindro elíptico $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

(f) superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ incluida en el cono $x^2 + 2z^2 = y^2$, situada en el primer octante.

20. Calcula el área de la superficie determinada por la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior a la esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

21. Sea $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\}$.

(a) Expresa el volumen de M, usando coordenadas esféricas, y usando coordenadas cilíndricas. Calcula el valor del volumen.

(b) Calcula el área de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ contenida en M.

22. Calcula la integral de superficie $\iint_S (y^2 + 2yz)\,d\sigma$, siendo S la parte del plano $2x + y + 2z = 6$ en el primer octante.

23. Calcula la integral de superficie $\iint_S (x+z)\,d\sigma$, siendo S la porción del primer octante del cilindro $z^2 + y^2 = 9$, entre $x = 0$ y $x = 4$.

24. Verifica el teorema de Stokes con el cálculo de las integrales de línea sobre las trayectorias C de los campos vectoriales F que se indican:

(a) $F = (z, x, y)$, C curva intersección del plano $y + z = 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(b) $F = (x^2 + y, yz, x - z^2)$, C curva intersección del plano $2x + y + 2z = 2$ y los tres planos coordenados.

25. Comprueba el teorema de Stokes para $F(x,y,z) = (2z, x, y^2)$ donde S es el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y C es la sección de S con el plano OXY.

26. (a) Consideremos el volumen $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y + z \leq 2,\ x,y,z \geq 0\}$. Escribe el volumen de B como integrales iteradas en las formas indicadas:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \qquad \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1(y)}^{z_2(y)} dz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} dz \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} dy + \int_{x_3}^{x_4} dx \int_{z_3(x)}^{z_4(x)} dz \int_{y_3(x,z)}^{y_4(x,z)} dy$$

(b) Mediante un cambio a coordenadas cilíndricas, calcula el volumen de B.

(c) Sea S la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y + z = 2,\ x,y,z \geq 0\}$. Calcula, mediante el teorema de Gauss, el flujo del campo vectorial $f(x,y,z) = (0,0,x)$ a través de la superficie S, orientada de modo que la tercera componente del vector normal sea positiva. Dibuja en las figuras el vector normal de cada parametrización.

(d) Comprueba el resultado del apartado anterior aplicando razonadamente el teorema de Stokes a un campo vectorial de la forma $g = (0, g_2, 0)$. Indica en las curvas el sentido de recorrido acorde con la parametrización que hayas elegido.

27. Sea M el volumen encerrado por los cilindros $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ en el primer octante.

(a) Escribe las ecuaciones cartesianas que definen el recinto M.

(b) Representa gráficamente las superficies que componen la frontera de M. Indica las ecuaciones cartesianas que la describen, así como una parametrización de la misma. Calcula el vector normal de la parametrización e indica qué sentido tiene.

(c) Calcula el área de S la frontera de M que está contenida en el cilindro $x^2 + z^2 = 1$.

(d) Mediante el teorema de Gauss aplicado al campo vectorial $f(x,y,z) = (x,y,z)$, calcula el volumen de M.

(e) Sin efectuar ninguna integral, calcula cuánto vale la circulación del campo vectorial $g(x,y,z) = (0, -x^2/2, yz)$ a lo largo de la frontera de S, recorrida de modo que el vector normal lo dejemos siempre al mismo lado.

28. Consideremos el volumen $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ x, z \geq 0\}$, la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ x, z \geq 0\}$ y el campo vectorial $f(x,y,z) = (x, y, -2z)$.

(a) Calcula el volumen de M integrando por secciones perpendiculares a un eje.

(b) Describe la frontera de M. Parametrízala.

(c) Describe la frontera de S. Parametrízala.

(d) Calcula el flujo del campo f a través de la superficie S, mediante

i. el teorema de Stokes, buscando un campo $g = (g_1, g_2, 0)$ tal que $\nabla \times g = f$;

ii. el teorema de Gauss.

29. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el sólido dado por las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 2 - z$, $z \geq 0$, $|y| \leq x$.

(a) Expresa el volumen de M mediante integrales triples en coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas.

(b) Calcula el volumen de M.

(c) Utiliza el teorema de Gauss para calcular el flujo del campo $f(x,y,z) = (-y, x, 2z)$ a través de la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2 - z,\ z \geq 0,\ |y| \leq x\}$$

orientada de tal forma que la tercera componente del vector normal sea positiva.

(d) Calcula la integral de línea del campo anterior en el borde de S con la orientación inducida.

30. Se consideran la semiesfera H de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y un trozo de paraboloide P de ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$, ambas en el semiespacio $z \geq 0$. Supongamos que f es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Explica razonadamente por qué es

$$\iint_H \nabla \times f \cdot n d\sigma + \iint_P \nabla \times f \cdot n d\sigma = 0,$$

orientada la semiesfera de modo que el vector normal en el punto $(0,0,2)$ es (0, 0, 1) y el paraboloide de modo que el vector normal en el punto (0, 0, 4) es (0, 0,-1).

31. Sea M el recinto limitado en el primer octante por el plano $x+y+z=1$ y el cilindro parabólico $z=2x^2$.

(a) Proyecta el recinto M en el plano $z=0$ y expresa su volumen como una integral iterada de la forma
$$\iint_A dx\,dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dz,$$
indicando qué conjunto es A y qué funciones son α y β. Calcula el volumen de M proyectándolo en el plano $y=0$.

(b) Comprueba el resultado del apartado anterior mediante el teorema de Gauss, aplicado al campo vectorial $f(x,y,z)=(x,0,0)$ en el recinto M.

(c) Comprueba el teorema de Stokes en la superficie frontera de M que forma parte del cilindro parabólico $z=2x^2$ y el campo f del apartado anterior.

32. Consideremos el volumen $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2\le z\le y,\ 0\le x\le 2\}$.

(a) Proyecta el volumen M en los tres planos coordenados y calcula su volumen.

(b) Comprueba el teorema de Gauss en el recinto M para el campo vectorial $f(x,y,z)=(x,3y,6z)$.

33. Sea $f(x,y,z)=(z^2\arctan(y^2), z^3\log(1+x^2), z)$. Aplicando el teorema de Gauss, calcula la integral en la superficie S del campo f, siendo S la superficie del paraboloide $x^2+y^2+z=2$ que queda por encima del plano $z=1$, orientada de modo que el vector normal en el punto $(0,0,2)$ es $(0,0,1)$.

34. Consideremos el conjunto $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x+y\le 3,\ z\le 1-y^2,\ x,\ y,\ z\ge 0\}$.

(a) Expresa el volumen de A mediante integrales triples como las indicadas:
$$\int dy\int dx\int dz, \qquad \int dz\int dy\int dx, \qquad \int dx\int dz\int dy$$

(b) Comprueba el teorema de Gauss en el recinto A y el campo $F(x,y,z)=(0,0,z)$.

35. Sea $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\le x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2\le 2,\ x,y,z\ge 0\}$.

(a) Calcula el volumen de M.

(b) Sea la superficie $S=M\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x^2+y^2\}$. Calcula el área de S.

(c) Utilizando el conjunto M y el campo vectorial $f(x,y,z)=(x,y,0)$, calcula, mediante el teorema de Gauss, el flujo de f a través de la superficie $L=M\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=2\}$ orientada al exterior de la esfera.

36. Sea S la parte de superficie esférica $x^2+y^2+z^2=4$ exterior al cilindro $x^2+y^2=1$.

(a) Calcula el flujo del campo $f(x,y,z)=(y,-x,z)$ a través de la superficie S, con la normal orientada al exterior de la esfera.

(b) Demuestra que el flujo de este campo a través de cualquier parte de la superficie cilíndrica $x^2+y^2=1$ es cero.

(c) Usa el teorema de la divergencia para calcular el volumen limitado por la superficie S y el cilindro anterior.

37. Sean las superficies A y B definidas como:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\, z = y^2\} \quad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\, 0 \leq z \leq y^2\}$$

(a) Parametriza la superficie A y calcula el vector normal.

(b) Calcula el área de la superficie B.

(c) Calcula, mediante el teorema de Gauss, el flujo del campo vectorial $f(x,y,z) = (x,y,-2z)$ a través de la superficie A, orientada de modo que la tercera componente del vector normal sea positiva.

(d) Comprueba el resultado del apartado anterior buscando un campo vectorial $g = (A,B,0)$ tal que $\nabla \times g = f$ y aplicando el teorema de Stokes.

38. Consideremos los recintos

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4-z^2 \leq x^2+y^2 \leq 4,\, x,y \geq 0,\, 0 \leq z \leq 1\} \\ S_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\, x,y \geq 0,\, 0 \leq z \leq 1\} \\ S_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4\, x,y \geq 0,\, 0 \leq z \leq 1\} \end{aligned}$$

(a) Calcula las áreas de S_1 y S_2.

(b) Calcula el flujo del campo vectorial $f(x,y,z) = (z,0,x)$ a través de S_1, orientada al exterior de M,

i. directamente,
ii. aplicando el teorema de Gauss en el recinto M,
iii. aplicando el teorema de Stokes a un campo $g(x,y,z) = (A,B,0)$.

39. Sean

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq 4-z \leq x^2+y^2 \leq 4,\, x \geq 0\} \\ S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4-z = x^2+y^2,\, x \geq 0,\, 0 \leq z \leq 2\}. \end{aligned}$$

(a) Calcula el volumen de M y el área de S.

(b) Calcula el flujo del campo vectorial $f(x,y,z) = (y,0,x)$ a través de la superficie S orientada al exterior de M,

i. directamente,
ii. aplicando el teorema de Gauss en el volumen M,
iii. aplicando el teorema de Stokes a un campo $g(x,y,z) = (0,B,C)$.

40. Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 2-z,\, y \geq 0,\, 0 \leq z \leq 1\} \\ S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 2-z,\, y \geq 0,\, 0 \leq z \leq 1\} \end{aligned}$$

(a) Calcula el volumen de M y el área de S.

(b) Calcula el flujo del campo vectorial $f(x,y,z) = (0,z,y)$ a través de la superficie S, orientada al exterior de M,

i. directamente,
ii. aplicando el teorema de Gauss en el recinto M,
iii. aplicando el teorema de Stokes a un campo $g(x,y,z) = (A,B,0)$.

41. Consideremos el volumen en $\mathbb{R}^3$ descrito por las desigualdades $z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $1 \leq z \leq 2$.

(a) Escribe la integral que da su volumen en coordenadas cartesianas en la forma $\int\int dx\, dy \int dz$. Evalúa dichas integrales para calcular el volumen del recinto.

(b) Aplicando el teorema de Gauss al campo vectorial $f(x, y, z) = (x, y, z)$, comprueba el resultado del apartado anterior.

42. Sea M el recinto limitado por los paraboloides $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 3x^2 + 3y^2 - 3$, tal que $x + y > 0$.

(a) Proyecta el recinto M en el plano $z = 0$ y calcula su volumen.

(b) Usa el teorema de Gauss para calcular el flujo del campo $f(x, y, z) = (0, y, 0)$ a través de la superficie $S = M \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ orientada al exterior de M.

(c) Calcula el flujo anterior directamente.

(d) Calcula el área de la superficie ∂M:

(e) Comprueba el teorema de Stokes en la superficie S siendo el campo vectorial $f(x, y, z) = (x^2, 0, 0)$.

43. Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z - 1)^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 - z^2,\ z \geq 0\}$.

(a) Expresa el volumen del recinto M en la forma

$$\iint_A dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz$$

(b) Calcula el volumen de M usando coordenadas cilíndricas.

(c) Comprueba el resultado obtenido en el apartado anterior usando el teorema de Gauss en el recinto M con el campo vectorial $f(x, y, z) = (y, 0, z - 1)$.

44. Consideremos el recinto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq y + 2,\ 0 \leq y \leq x\}$, la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = y + 2,\ 0 \leq y \leq x\}$ y el campo vectorial $f(x, y, z) = (0, 0, x)$.

(a) Calcula directamente el flujo del campo f a través de S orientada de forma que el vector normal apunte hacia arriba.

(b) Usando el volumen M, calcula de nuevo el flujo de f a través de S con la orientación del primer apartado mediante el teorema de Gauss. Dibuja en cada superficie frontera el vector normal correspondiente a la parametrización elegida.

(c) Encuentra un campo $g = (A, B, 0)$ tal que $\nabla \times g = f$. Calcula de nuevo el flujo de f a través de S con la misma orientación mediante el teorema de Stokes. Dibuja en cada curva frontera el sentido de recorrido determinado por la parametrización que has elegido.

45. Comprueba el teorema de Stokes en la superficie del plano $z = y + 2$ contenida en el paraboloide $z = x^2 + y^2$ para el campo vectorial $f(x, y, z) = (y, xz, y)$.

46. Prueba mediante el teorema de Stokes que la circulación del campo vectorial $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z(x^2 + y^2))$ a lo largo de cualquier curva cerrada C sobre la superficie del cono $z^2 = x^2 + y^2$ es nula.

47. Halla el flujo del campo vectorial $F(r) = \dfrac{qr}{\|r\|^3}$ para $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a través de una esfera S dada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

48. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ limitado por las siguientes superficies:

$$
\begin{aligned}
S &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \arctan \frac{y}{x},\ x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\right\}\\
L &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < \arctan \frac{y}{x},\ x^2 + y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0\right\}\\
T &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < \frac{\pi}{2}\right\}\\
B &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ x^2 + y^2 < 1,\ x, y > 0\}
\end{aligned}
$$

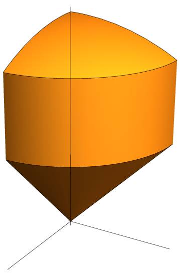
(a) Calcula el área de la superficie L.

(b) Calcula directamente el flujo del campo vectorial $f(x, y, z) = (2x, 2y, z)$ a través de la superficie L orientada al exterior de M.

(c) Aplica el teorema de Gauss y calcula el flujo de f a través de la superficie S, orientada al exterior de M.

49. Se considera el sólido

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1/4,\ x^2 + y^2 \leq z^2,\ x, y, z \geq 0\}$$



(a) Expresa el volumen de M como integrales iteradas en las formas:

$$\operatorname{vol}(M) = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} dy$$

$$\operatorname{vol}(M) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,z)} dz$$

(b) Calcula el volumen de M.

(c) Calcula el flujo de $f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ a través de la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1/4,\ x, y \geq 0,\ 1/2 \leq z \leq \sqrt{3}/2\}$$

orientada al exterior de M,

i. directamente;

ii. aplicando el Teorema de Gauss;

iii. usando el teorema de Stokes, buscando previamente un campo $g = (A, B, 0)$ cuyo rotacional sea f.

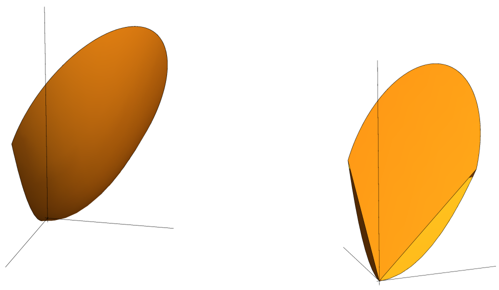
50. Sea S la porción del plano $x + y + z = 2$ que se encuentra sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante.

(a) Calcula el área de la superficie S.

(b) Calcula el flujo del campo vectorial $f(x, y, z) = (0, -z, 0)$ a través de la superficie anterior directamente.

(c) Calcula el flujo del campo vectorial $f(x, y, z) = (0, -z, 0)$ a través de la superficie anterior usando el teorema de Gauss en el recinto que encierran el plano y el cilindro en el primer octante.

51. Se considera el sólido $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq x + y,\ x, y \geq 0\}$



(a) Expresa el volumen de M como integrales iteradas en la forma $\operatorname{vol}(M) = \iint_B dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,z)} dz$

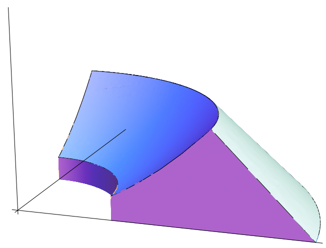
(b) Calcula el volumen de M.

(c) Calcula el flujo de $f(x, y, z) = (x, y, -2z)$ a través de la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \leq x + y,\ x, y \geq 0\}$$

orientada al exterior de M: 1) directamente; 2) aplicando el Teorema de Gauss; 3) usando el teorema de Stokes, buscando previamente un campo $g = (0, B, C)$ cuyo rotacional sea f.

52. Sea el sólido $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4z \leq x^2 + y^2 \leq (z - 3)^2,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x, y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}$



(a) Calcula el volumen de M.

(b) Calcula el flujo de $f(x, y, z) = (z, 0, 0)$ a través de la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in M : x = 0\}$$

orientada al exterior de M: 1) directamente; 2) aplicando el Teorema de Gauss; 3) usando el teorema de Stokes, buscando previamente un campo $g = (A, B, 0)$ cuyo rotacional sea f.

53. Sea S la superficie definida por $x^2+y^2+z^2=2$, $x,y\geq 0$, $z\geq 1$.

(a) Calcula el área de S:

i. Parametrizando la superficie S.

ii. Usando la expresión explícita de la superficie S.

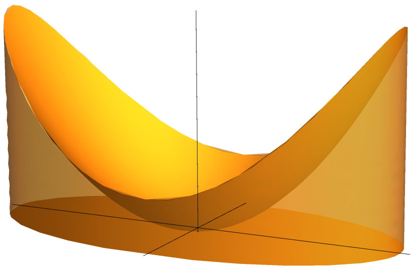
(b) Calcula directamente el flujo del campo $f(x,y,z)=(y,0,0)$ a través de la superficie S orientada la superficie hacia las z crecientes.

(c) Usando el teorema de Stokes con un campo $g(x,y,z)=(0,A(x,y,z),B(x,y,z))$, calcula de nuevo el flujo del campo f a través de S orientada del mismo modo.

(d) Usando el teorema de Gauss calcula de nuevo el flujo del campo f a través de superficie S con la misma orientación.

54. Se considera el sólido

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \\ 0\leq z\leq x^2+y^2 \\ x^2+4y^2\leq 1\}$$



(a) Calcula el volumen de M.

(b) Calcula la circulación

$$\int_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$$

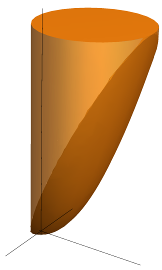
a lo largo de la curva $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=x^2+y^2,\ x^2+4y^2=1\}$ recorrida en sentido antihorario vista desde arriba,

i. directamente;

ii. usando el teorema de Stokes.

55. Se considera el sólido

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \\ x^2+y^2\leq z\leq 4,\ x^2+y^2\leq 2y\}$$



(a) Expresa el volumen de M como integrales iteradas en las formas siguientes, determinando los conjuntos A_i, B_i, C y las funciones $x_i(y,z)$, $y_i(x,z)$, $z_i(x,y)$:

$$\mathrm{vol}(M)=\iint_{A_1} dydz\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} dx+\iint_{A_2} dydz\int_{x_3(y,z)}^{x_4(y,z)} dx$$

$$\mathrm{vol}(M)=\iint_{B_1} dxdz\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} dy+\iint_{B_2} dxdz\int_{y_3(x,z)}^{y_4(x,z)} dy$$

$$\mathrm{vol}(M)=\iint_{C} dxdz\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dx$$

(b) Calcula el volumen de M.

(c) Calcula el flujo de $f(x,y,z) = (2x, -y, -z)$ a través de la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4,\ x^2 + y^2 = 2y\}$$

orientada al exterior del sólido M,

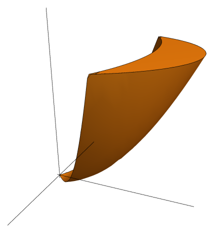
i. directamente;

ii. aplicando el Teorema de Gauss;

iii. usando el teorema de Stokes, buscando previamente un campo $g = (A, B, 0)$ cuyo rotacional sea f.

56. Se considera el sólido

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 \leq z \leq x^2 + 2y^2,\ y \geq 0,\ z \leq 1\}$$



(a) Describe (sin calcular) el volumen de M usando coordenadas cilíndricas mediante una integral iterada en las formas

$$\operatorname{vol}(M) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \left(\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\,dr \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} dz + \int_{r_3(\theta)}^{r_4(\theta)} r\,dr \int_{z_3(r,\theta)}^{z_4(r,\theta)} dz \right).$$

$$\operatorname{vol}(M) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{z_5(\theta)}^{z_6(\theta)} dz \int_{r_5(\theta,z)}^{r_6(\theta,z)} r\,dr.$$

(b) Calcula el volumen de M usando el Teorema de Gauss con el campo

$$f(x,y,z) = (x, y, 0).$$