Clase 1: Introducción

Tutorías: Viernes 10:00-14:00 (egarcia12@us.es)

Módulo 15 (Análisis), despacho 8

Apuntes: Notas de clase

Complementarios → Enseñanza virtual

Evaluación: Proyecto docente en enseñanza virtual

↳ 1ª Parcial: 19/03/2025 (clase)

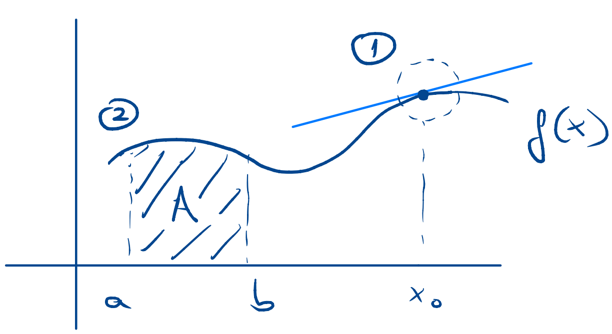
2º Parcial: 21/05/2025 (clase)

2º Cuatrimestral: 26/05/2025, 9:30

1ª Convocatoria: 09/06/2025, 9:30

- Resumen 1ª cuatrimestre:

Recordamos que el cálculo de una variable se resume en una imagen:



① Cálculo diferencial

② Cálculo integral

Conectados por el Teorema Fundamental del Cálculo.

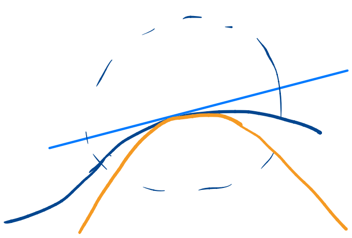
① Un problema básico (pero difícil) es la resolución de ecuaciones no lineales,

$f(x) = 0 \;\rightarrow$ ¿x? ¿cuántas soluciones?

Soluciones aproximadas
- → Métodos iterativos (Bolzano, ...)
- → Representación gráfica

Para estudiar $f(x)$ necesitamos calcular sus límites, crecimiento, asíntotas, ...

· Más aun, sabemos que si $f(x)$ es derivable en x_0, entonces podemos aproximarla localmente por su recta tangente, siendo la pendiente el valor de la derivada



$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Si es más regular, los polinomios de Taylor nos dan mejores aproximaciones.
En el caso límite de funciones analíticas, podemos escribirlas como series de potencias (en un cierto intervalo de convergencia):

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad \text{en } \mathbb{R},$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \text{en } (-1,1].$$

→ Los desarrollos de Taylor son la principal herramienta de la asignatura para el estudio local de funciones no lineales $f(x)$.

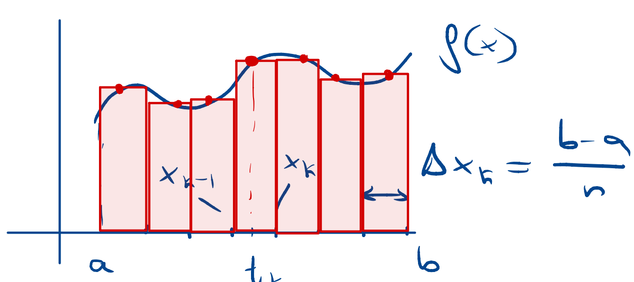
- Además del estudio de funciones y la resolución de ecuaciones, las derivadas fueron fundamentales en los problemas de optimización,

$$\text{máx./mín. } f(x) \longleftrightarrow f'(x) = 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{y casos borde} \\ \text{como frontera y} \\ \text{puntos no derivables}\end{array}\right)$$

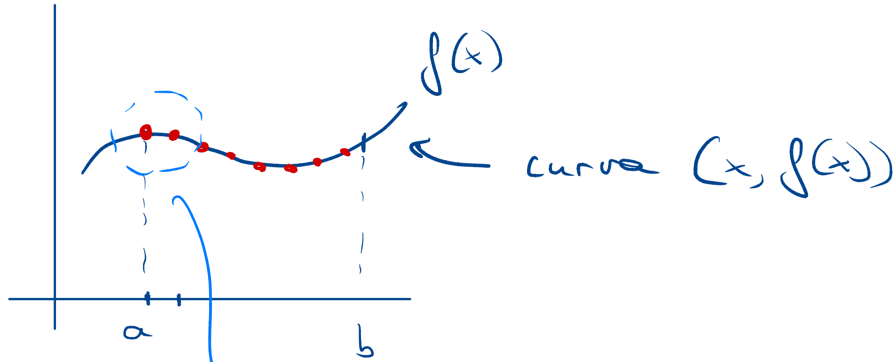
② La integral de Riemann formaliza la idea de "sumar infinitos trozos infinitesimales" para así calcular áreas, masas, etc.,

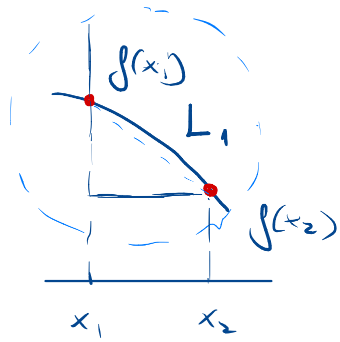
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(t_k), \quad t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$



Por ejemplo, ¿cómo podemos calcular la longitud de una curva?





$$L_1^2 \simeq (x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$

$$\Delta f_k = f(x_{k+1}) - f(x_k),$$

Así,

$$L \simeq \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta f_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{\Delta f_k^2}{\Delta x_k^2}}\, \Delta x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_k}{\Delta x_k}\right)^2}\, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

- Para terminar, recordamos que la integral nos permite definir "nuevas" funciones, por ejemplo,

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

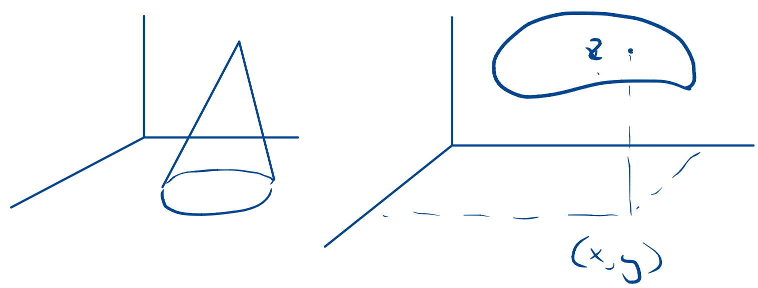
que podemos analizar mediante polinomios de Taylor (partiendo del T^{ª} Fund. del cálculo), integrales impropias (para estudiar $\lim_{x \to +\infty} e^{f(x)}$), etc.

- <u>Resumen 2º cuatrimestre:</u>

En la práctica, necesitamos funciones que dependan de más variables. Por ejemplo:

1) Para describir una superficie,

$$\left.\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto z = f(x,y) \end{aligned}\right\}$$



2) Temperatura en cada punto del espacio,

$$\left.\begin{aligned} T:\ & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ & (x,y,z) \longmapsto T(x,y,z) \end{aligned}\right\}$$

3) Velocidad de una partícula,

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}:\ & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) \longmapsto \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

4) Aplicación que determina el beneficio esperado de un cliente dados como datos su edad, estudios, universidad, etc.:

$$\left.\begin{array}{l} B:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,\dots,x_n) \longmapsto B(x_1,x_2,\dots,x_n) \end{array}\right\}$$

Como caso particular se tienen las funciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto f(x) = \lambda x \end{array}\right\} \text{(rectas)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \quad \vec{x} \longmapsto \vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} \end{array}\right\} A \in \mathcal{M}_{m\times n} \rightsquigarrow \text{Álgebra lineal}$$

Siguiendo lo visto para funciones reales de variable real, querremos entender, dada $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ general:

¿"Suavidad"? ¿"Aproximable por funciones lineales"?

¿Resolución de sistemas?

Ej: $\left.\begin{array}{l} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{array}\right\} \to ¿x,y,z?$

¿Máx./mín.?

Parcial 1

- Cálculo de áreas de superficies, volúmenes.
  Cálculo vectorial: campos conservativos, trabajo, flujo, ... [Green, Gauss, Stokes]
  (electromagnetismo, elasticidad, fluidos, ...).

$\boxed{\text{Clase 2}}$: Funciones de varias variables

- El conjunto $\mathbb{R}^n = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \}$

junto con las operaciones

1) suma de vectores: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$,

2) producto por escalar: $\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$,

forma un espacio vectorial. Si añadimos la operación producto escalar entonces hablamos del espacio euclídeo.

- **Def.:** Producto escalar

$$\left.\begin{aligned} (\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto \vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \end{aligned}\right\}$$

Nota: En notación matricial, $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$.

El producto escalar nos permite definir longitudes y ángulos.

• **Def:** Norma euclídea o módulo

$$\left.\begin{array}{l} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty) \\ \qquad \vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} \end{array}\right\}$$

Nota: En general, se llama norma a una aplicación que nos permite "medir vectores". Debe satisfacer que:

1) $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = 0$

2) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\,\|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x}$ vector, λ escalar

3) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x},\vec{y}$ vectores (desig. triangular)

Como consecuencia, se tiene además que

$\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x}$, $\qquad \|\vec{x}-\vec{y}\| \geq \big|\,\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\,\big| \quad \forall \vec{x},\vec{y}$

$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x},\vec{y}$ [Cauchy-Schwarz]

→ Nota: En $\mathbb{R}$, la norma euclídea es el valor absoluto.

• **Def:** Distancia euclídea

$$\begin{array}{l} d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty) \\ \qquad (\vec{x},\vec{y}) \longmapsto d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2} \end{array}$$

Vemos que cumple las condiciones requeridas para ser una distancia,

$$\left.\begin{array}{l} d(\vec{x},\vec{y}) \geq 0; \quad d(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}, \\ d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{y},\vec{x}), \\ d(\vec{x},\vec{z}) \leq d(\vec{x},\vec{y}) + d(\vec{y},\vec{z}) \end{array}\right\}$$

- Por último, definimos el ángulo θ entre dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$:

$$\cos(\theta) = \underbrace{\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}}_{\leq 1} \text{ (Cauchy-Schwarz)}.$$

[Se puede comprobar que así coincide con el concepto de ángulo clásico en 2d]

En particular, $\vec{x}, \vec{y}$ son perpendiculares si $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$.

- <u>Def</u>: Dominio, imagen, grafo

$$\left.\begin{array}{l} \vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \qquad \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) \end{array}\right\},$$ decimos que:

1) $D(\vec{f}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es el dominio de $\vec{f}$,

2) $Im(\vec{f}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m : \exists \vec{x} \in D(\vec{f}) \text{ con } \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})\} \subseteq \mathbb{R}^m$ es la imagen de $\vec{f}$.

3) Si $m = 1$, entonces $\vec{f}(\vec{x}) = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ se llama campo escalar.
Si $m \geq 2$, $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ se llama campo vectorial.

Vemos que un campo vectorial está compuesto de m funciones escalares, llamadas componentes.

4) $G(\vec{f}) = \{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \vec{x} \in D(\vec{f})\}$

• Ejemplo: $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

Tenemos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 25 - x^2 - y^2 \geq 0\} =$

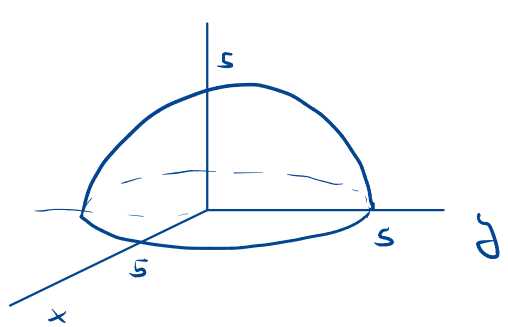
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5^2\} \equiv$ círculo de radio 5 y centro $(0,0)$

$Im(f) = [0, 5]$

$G(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 5^2, \ z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 5^2, \ z^2 + x^2 + y^2 = 25, \ z \geq 0\}$

$\equiv$ semiesfera de radio 5 y centro $(0,0,0)$



- Además de la gráfica de una función (que solo es práctica cuando $n=2$, i.e., $z=f(x,y)$), las funciones de varias variables se pueden describir por sus conjuntos de nivel:

- **Def:** Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se llama conjunto de nivel $c \in \mathbb{R}$ de f a

$$\{ \vec{x} \in D : f(\vec{x}) = c \}$$

En particular, si

- $n=2$, $\{(x,y) \in D : f(x,y) = c\}$ son curvas de nivel,
- $n=3$, $\{(x,y,z) \in D : f(x,y,z) = c\}$ son superficies de nivel.

Nota: La curva de nivel c de $f(x,y)$ es la proyección al plano $z=0$ del corte de la gráfica de f con el plano horizontal $z=c$.

Ejemplo: Curvas de nivel del caso anterior,

$$f(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}.$$

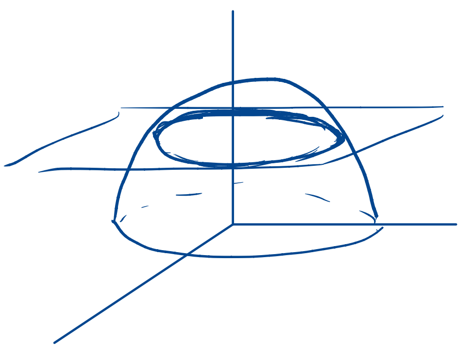
Son las curvas dadas por $f(x,y) = c \iff$

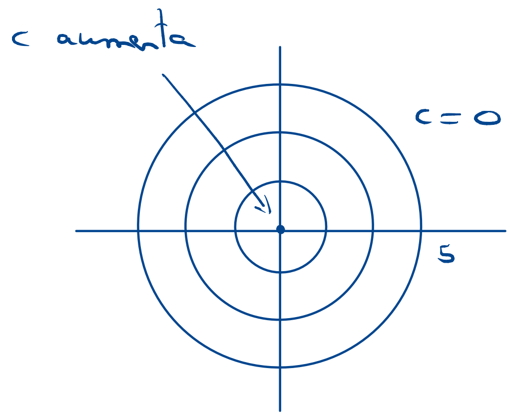
$$\Longleftrightarrow \sqrt{25-x^2-y^2} = c \Longleftrightarrow 25-x^2-y^2 = c^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2+y^2 = 25-c^2$$

Para $c \in [0,5)$ obtenemos círculos de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{25-c^2}$.

Para $c=5$, la curva degenera en un punto: $(0,0)$.

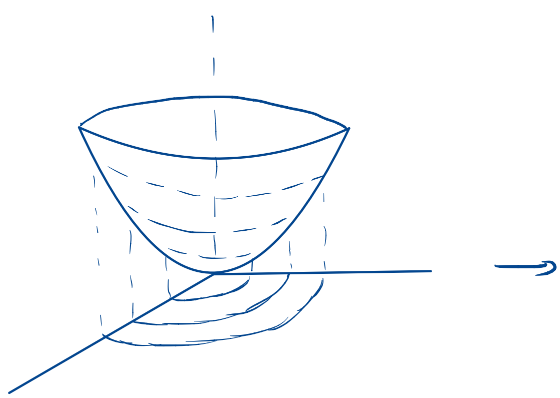


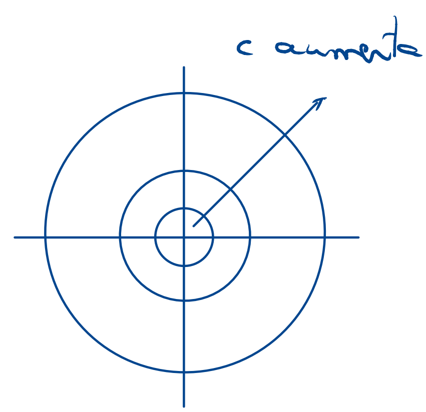


• Ejemplo: $f(x,y) = x^2+y^2$

Curvas de nivel: $x^2+y^2 = c$ con $c \in [0,+\infty)$

Gráfica:





• Ejercicio: (Hoja 1, $\boxed{1}$ c), f))

$\boxed{\text{Clase 3}}$: Límites

Día anterior: $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

↳ Dominio, Imagen, Grafo

↳ $m=1$: Función escalar ⇝ conjuntos de nivel.

↳ $n=2$: curvas de nivel.

• Ejercicio: $(\sim \boxed{1} f))$

$$f(x,y) = \log\left((2x-x^2-y^2)(x^2+y^2-x)\right) > 0. \quad ¿D(f)?$$

Sol: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x-x^2-y^2)(x^2+y^2-x) > 0\}$

$$(2x-x^2-y^2)(x^2+y^2-x) > 0$$

$$(2x-x^2-y^2)(x^2+y^2-x) > 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-x^2-y^2 > 0, \quad x^2+y^2-x > 0 & (1) \\ 2x-x^2-y^2 < 0, \quad x^2+y^2-x < 0 & (2) \end{cases}$$

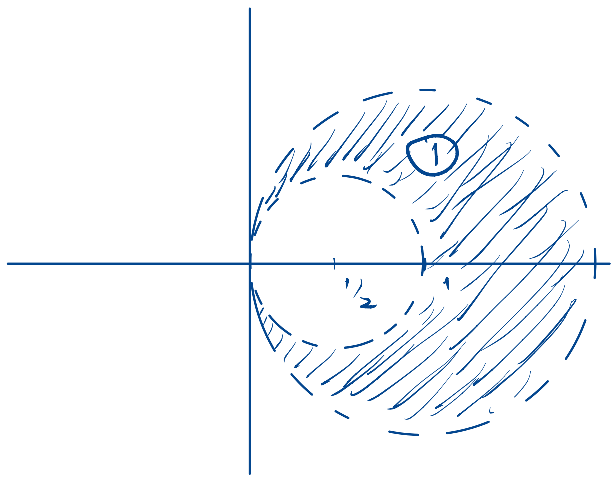
• $x^2+y^2-2x = (x-1)^2+y^2-1 > 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2+y^2 > 1$

• $x^2+y^2-x = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4} > 0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 > \frac{1}{2^2}$

Por tanto,

$$① \iff (x-1)^2+y^2<1,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{2^2}$$

$$② \iff (x-1)^2+y^2>1,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{2^2}$$ [Conjunto vacío]



- Las operaciones con funciones siguen las mismas reglas que en el caso escalar (suma, producto, etc.)

- Las funciones polinómicas constan de sumas de productos de las variables:

$$p(x,y) = x^2 + xy + x^2y + y^3 + x^2y^2 \quad \text{(grado 4)}.$$

$$p(x,y,z) = xyz + z^2 \quad \text{(grado 3)}$$

• Conceptos topológicos básicos en $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}$ hablábamos de intervalos abiertos, cerrados, conjuntos acotados, etc. $\rightsquigarrow$ (Bolzano, Weierstrass, ...)
Vemos ahora cómo generalizarlo en $\mathbb{R}^n$.

En primer lugar, recordamos que la norma (módulo) nos permite medir distancias, como hacía el valor absoluto en $\mathbb{R}$.

• Def: Bola abierta y cerrada

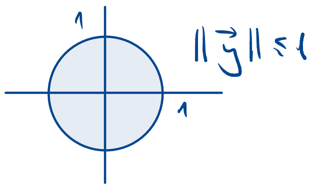
Se llama bola abierta de centro $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto

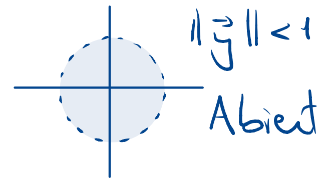
$$B_r(\vec{x}) = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n : d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| < r \}.$$

Si la desigualdad es $\leq$ entonces se llama bola cerrada, y la denotamos como $\overline{B}_r(\vec{x})$.

Nota: La definición de bola depende de la norma que se use. Nosotros usaremos siempre la norma euclídea.

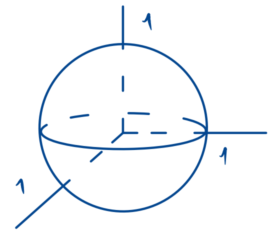
Ej: $n=2$, $\vec{x}=\vec{0}$, $r=1 \rightarrow$ La bola unidad es un círculo,

Cerrada 



Abierta

En $= 2$, la bola unidad es una esfera,



• Def: Interior, exterior, frontera

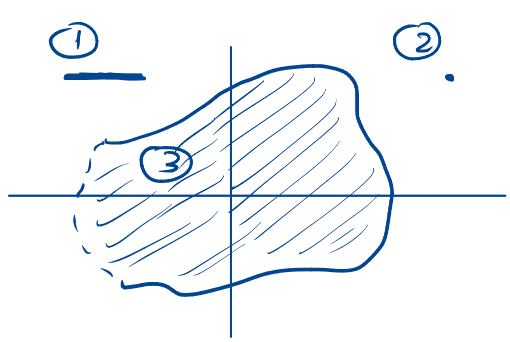
Dado $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $X \subset \mathbb{R}^n$, se dice que

1) $\vec{x}$ es punto interior de X si $\exists r>0 \,/\, B_r(\vec{x}) \subset X$.

2) $\vec{x}$ es punto exterior de X si $\exists r>0 \,/\, B_r(\vec{x}) \subset X^c = \mathbb{R}^n \setminus X$.

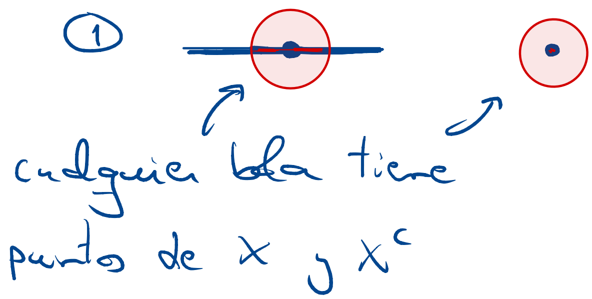
3) $\vec{x}$ es punto frontera de X si $\forall r>0, \left|\begin{array}{l} B_r(\vec{x}) \cap X \neq \emptyset \\ B_r(\vec{x}) \cap X^c \neq 0 \end{array}\right.$

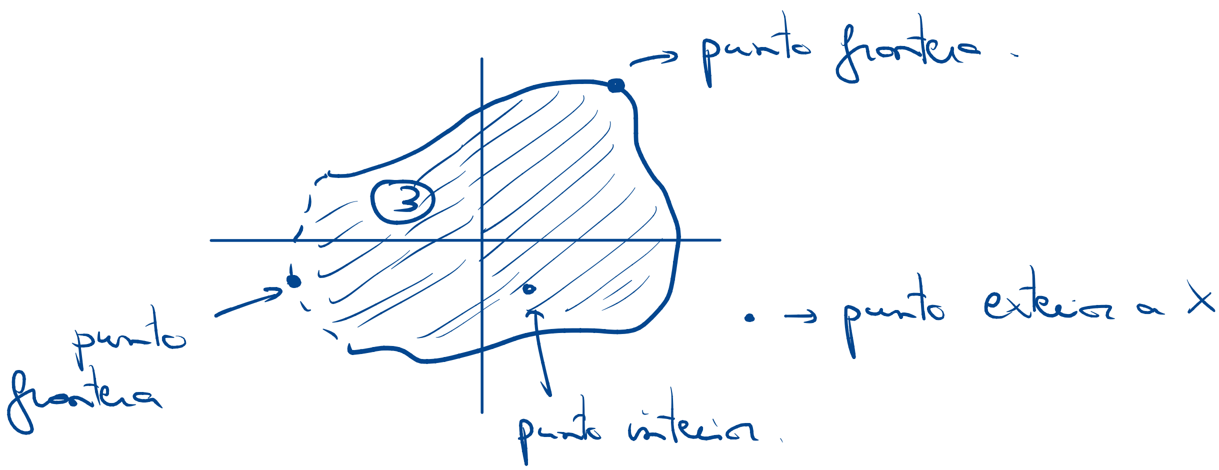
A los respectivos conjuntos de puntos interiores, exteriores, frontera de X los denotaremos $\operatorname{int}(X)$, $\operatorname{ext}(X)$, ∂X.

Ej: 

Sea X la unión de los conjuntos ①, ②, ③.

Claramente, los puntos en 1 y 2 son puntos frontera:





• <u>Def</u>: Conjunto abierto, cerrado

$X \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es

1) abierto si $X = \text{int}(X)$,

2) cerrado si $X^c = \mathbb{R}^n \setminus X$ es abierto.

<u>Nota</u>: Un conjunto puede no ser abierto ni cerrado, como por ejemplo el intervalo $[2,3)$ en $\mathbb{R}$, o el conjunto 3 anterior en $\mathbb{R}^2$.

Nota: Se cumple la siguiente caracterización,

1) $X \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si $X \cap \partial X = \emptyset$,

2) $X \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si $\partial X \subseteq X$.

[ejercicio opcional: demostrar 1), 2)]

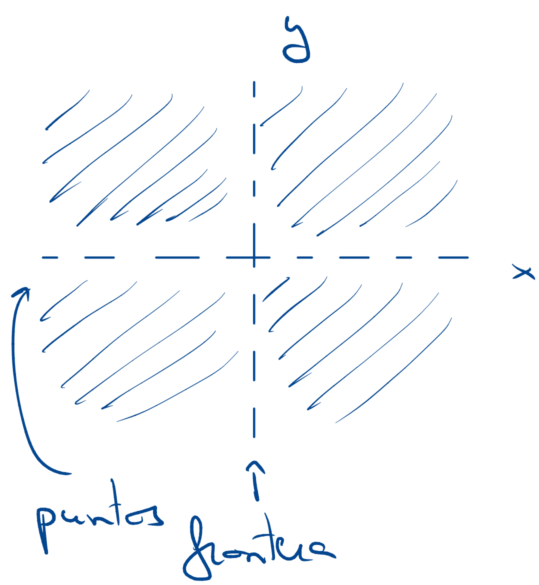
• Def: Conjunto acotado.

$X \subset \mathbb{R}^n$ se dice acotado si $\exists M > 0 \, / \, \|\vec{x}\| \leq M \quad \forall \vec{x} \in X$.

Es decir, $X \subset \mathbb{R}^n$ es acotado si está contenido en una bola suficientemente grande: $X \subset B_M(\vec{0})$.

• Ejemplos: Determinar si el dominio de f es abierto, cerrado, acotado o no acotado.

1) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$



$D(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0 \} =$

$= \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \}$

$\Rightarrow D(f)^c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \}$

Por tanto, $D(f)$ es:

No acotado, no cerrado, abierto.

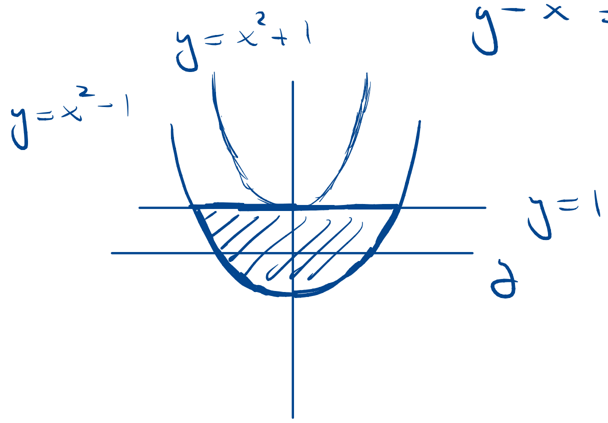
2) $f(x,y) = \arccos(y-x^2)\sqrt{1-y}$

Como $\cos(\theta)\in[-1,1]\ \forall\theta\in\mathbb{R}$, sabemos que el dominio de $\arccos(\cdot)$ es $[-1,1]$. Por tanto,

$$D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le y-x^2\le 1,\ 1-y\ge 0\}$$

Lo representamos: $y-x^2=-1 \iff y=x^2-1$

$y-x^2=1 \iff y=x^2+1$



Por tanto, $D(f)$ es acotado, cerrado, (no abierto)

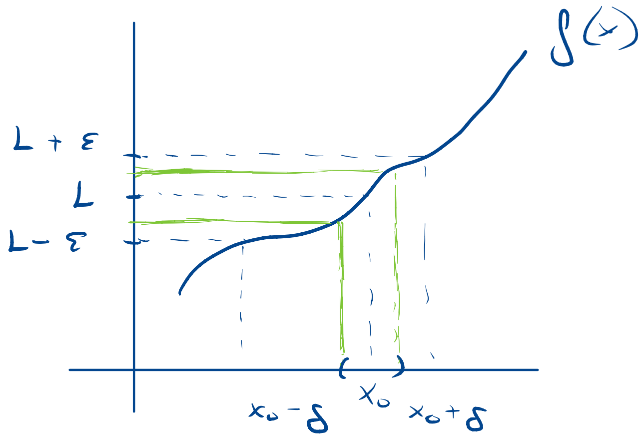
• **Límites de campos escalares:**

Recordamos en $\mathbb{R}$: $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice que tiene límite $L\in\mathbb{R}$ en $x_0\in\mathbb{R}$, y se denota como

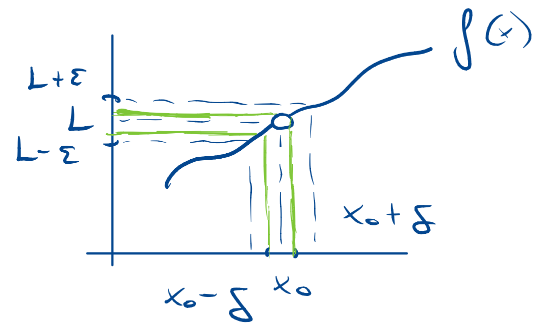
$$L=\lim_{x\to x_0} f(x),$$

si se cumple que $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)\ /$

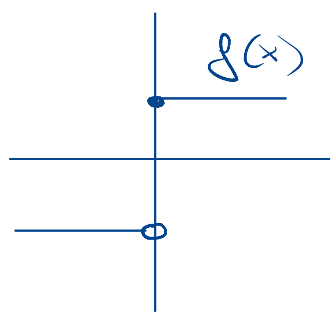
$$\forall x\in D\setminus\{x_0\},\ 0<|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-L|<\varepsilon.$$



<u>Nota</u>: f no necesita estar definida en x_0 . .



<u>Nota</u>: Para que el límite existiera, los límites por la izquierda y derecha debían coincidir:



$$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

- Conceptualmente, la definición de límite para funciones escalares de varias variables sigue la misma idea:

"Para valores tan próximos a L como quiera, puedo acercarme lo suficiente x_0 como para que las imágenes queden así de próximas a L".

Clase 4: Límites.

- **Def:** Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que f tiene límite L en $\vec{x}_0$,

$$L = \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}),$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) /$

$$\forall \vec{x} \in D \setminus \{\vec{x}_0\}, \; 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \implies |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon.$$

- Podemos reescribirlo como

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) /$

$$\vec{x} \in D \cap B_\delta(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\} \implies f(\vec{x}) \in B_\varepsilon(L).$$

- **Nota:** Vemos también que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L \iff \lim_{\|\vec{x} - \vec{x}_0\| \to 0} |f(\vec{x}) - L| = 0,$$

De esta forma podemos definir los límites infinitos, etc. como se hizo en una variable.

• Consecuencias: Al ser la definición básicamente como en $\mathbb{R}$, se siguen cumpliendo las propiedades vistas para los límites:

1) $$\left.\begin{array}{l}\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(x) = L_1 \\ \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(x) = L_2\end{array}\right| \Longrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f(\vec{x})+g(\vec{x})) = L_1+L_2,$$

2) Producto, cociente, etc.

3) El límite, si existe, es único.
(Misma demostración que en $\mathbb{R}$: reducción al absurdo)

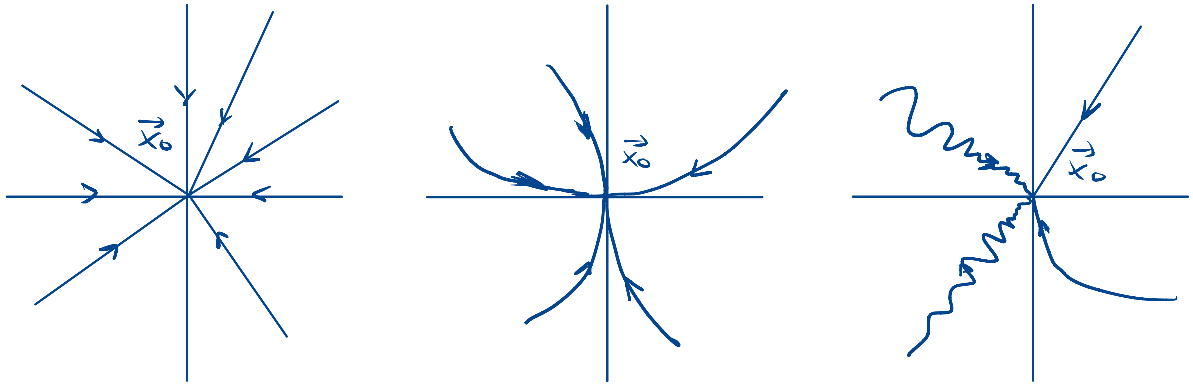
4) Regla del Sandwich:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } \exists\, g, h, \text{ y } r>0 \,/ \\ g(\vec{x}) \le f(\vec{x}) \le h(\vec{x}) \;\; \forall\, \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\} \\ \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} h(\vec{x}) = L\end{array}\right| \Longrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$$

→ Diferencia fundamental en varias variables:

Hay infinitas direcciones para aproximarse a x_0

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$:



- En lo que sigue, y en los ejercicios, nos centramos en $\mathbb{R}^2$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Se habla entonces de <u>límite doble</u>.

- <u>Def</u>: Límite direccional

$f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tiene límite $L\in\mathbb{R}$ en $\vec{x}_0=(a,b)$ en la dirección $y=\varphi(x)$ si

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 /$

$$0<\|(x,\varphi(x))-(a,b)\|<\delta \Rightarrow |f(x,\varphi(x))-L|<\varepsilon.$$

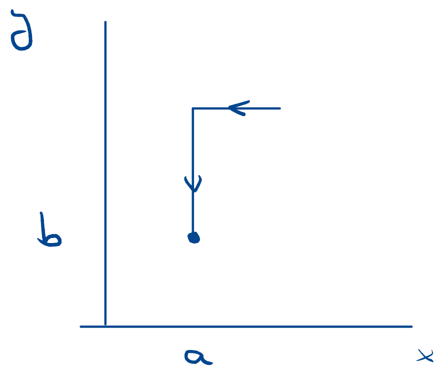
Denotamos
$$L=\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y=\varphi(x)}} f(x,y).$$

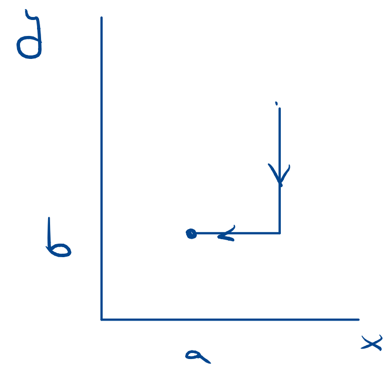
- Caso particular: Límites reiterados

Dada $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, se llaman límites reiterados de

f a los límites

$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right),\quad \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$$





<u>Nota</u>: Estos límites, como los direccionales, resultan en límites en una variable $\longrightarrow$ más fáciles de calcular.

<u>Nota</u>: Dado que el límite doble, si existe, es único, se concluye que si el límite doble existe entonces:

→ Todos los límites direccionales han de coincidir.

→ En particular, los reiterados han de ser iguales.

<u>Nota</u>!: Límite doble existe $\Longrightarrow$ Todas las direcciones coinciden

$$\not\Longleftarrow$$

- Cálculo de límites dobles:

Estrategias:

1) Caso fácil: sustituir y propiedades (suma, composición, ...)

Ej:

a) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2+2y+3}{x+y} = \frac{1^2+2\cdot 0+3}{1+0} = 4$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(y+x)} = \frac{\sqrt{5}}{\ln(3)}$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{x-y}} = 0.$$

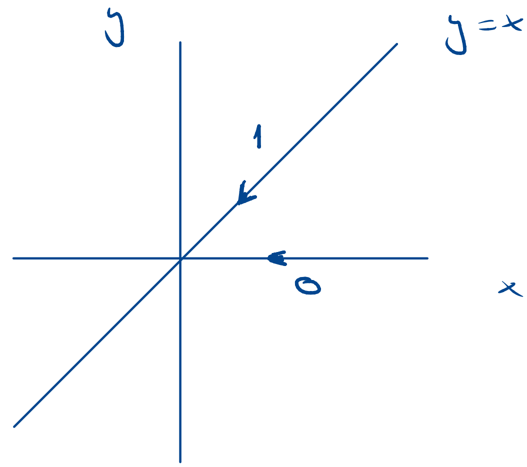
d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin(x)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^y = 1.$$

2) Probar que el límite no existe:

Al igual que en $\mathbb{R}$ bastaba ver que los laterales no coincidían, ahora basta con encontrar dos direcciones para las cuales los límites direccionales no coincidan.

Ej:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \dfrac{y}{x} = 0 \\[2ex] \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \dfrac{y}{x} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x}$$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Estudiamos a través de rectas $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$:

$$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{2m}{1+m^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Probamos a través de $y=mx$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3m}{x^4+m^2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^3}{m^2x} = 0$$

! Esto <u>no</u> implica que el límite doble sea 0.

Hay muchas otras direcciones posibles.

→ Este método <u>nunca</u> sirve por sí solo para calcular un límite

Probamos en las direcciones $y=mx^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{y^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^4}{m^2x^4+x^4} = \frac{2m}{m^2+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ No existe el límite doble.

- <u>Nota</u>: Suele ser útil en estos límites mirar direcciones para las cuales los diferentes términos del denominador son del mismo orden,

$$\frac{2xy}{x^4+y^2} \rightsquigarrow x^4 \approx y^2 \Longleftarrow y \simeq x^2$$

3) Probar que el límite existe usando la regla del Sandwich.

Ej:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$0 \leq \left|y \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |y| \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

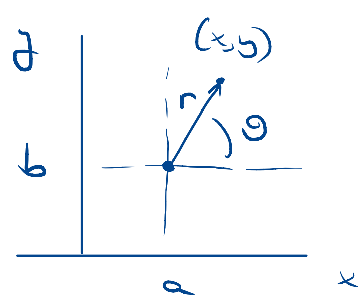
Como $\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$, entonces $0 \leq \left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq 4|x| \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0.$

4) Cambios de variables: polares.

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \longrightarrow \lim_{r\to 0^+} f(a+r\cdot\cos\theta, b+r\cdot\sin\theta)$

$x = a + r\cdot\cos\theta \quad (r>0$
$y = b + r\cdot\sin\theta \quad (\theta\in[0,2\pi)$



• Proposición:

$$\left.\begin{array}{l} |f(a+r\cdot\cos\theta,\ b+r\cdot\sin\theta)| \leq s(r,\theta) \\ |s(r,\theta)| \leq M \quad \forall\theta\in[0,2\pi) \text{ con } r \text{ fijo} \\ s(r,\theta) \underset{r\to 0^+}{\longrightarrow} L \quad \forall\theta\in[0,2\pi) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L.$$

• Ej:

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^4-y^2x}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{3r^4\cos^4\theta - r^3\sin^2\theta\cos\theta}{r^2} = 0$$

ya que $|3r^2\cos^4\theta - r\sin^2\theta\cos\theta| \leq 3r^2 + r \quad \forall\theta\in[0,2\pi)$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x}$$

Lo intentamos pasando a polares:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^2}{r\cos\theta} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r}{\cos\theta}$$

No podemos concluir que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r}{\cos\theta} = 0$,

pues no tenemos una cota de $\frac{r}{\cos\theta}$ que sea independiente de θ.

De hecho, esto indica que el límite no existe.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = m\sqrt{x}}} \frac{x^2 + y^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + m^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} (x + m^2) = m^2$$

$\boxed{\text{Clase 5}}$: Continuidad

• <u>Def.</u>: Se dice que $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $\vec{x}_0$ si

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0).$$

Y se dice que f es continua en D si lo es $\forall \vec{x} \in D$.
Se denota como $f \in C(D)$.

<u>Nota:</u> Para ser continua en $\vec{x}_0$, se necesita que

$\exists f(\vec{x}_0)$ (es decir, $\vec{x}_0 \in D(f)$),

$\exists \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$,

y ambos deben coincidir.

• <u>Propiedades</u>: Igual que en $\mathbb{R}$

[Suma, producto, composición, ...]

• <u>Def</u>: Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es discontinua en $\vec{x}_0 \in D$, se dice que

1) es una disc. evitable si $\exists \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$,

2) " " " esencial si $\nexists \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$.

• **Def:** Sea $f : X \setminus \{\vec{x}_0\} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si $\exists \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$, se llama prolongación por continuidad de f a la función

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in X \setminus \{\vec{x}_0\} \\ L & \text{si } \vec{x} = \vec{x}_0 . \end{cases}$$

Nota: Es la única función continua en $\vec{x}_0$ y que coincide con f en el resto de punto.

→ Es común abusar de notación y denotar también f a la función extendida.

• **Ejercicio:** Sea $m > 0$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{(x\,y)^m}{x^2+y^2} .$$

1) $D(f)$

2) ¿Es f continua en $(0,0)$?

Si no, ¿puede extenderse por continuidad?

Sol: $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

No es continua en $(0,0)$ pues no está definida en ese punto.

Estudiamos el límite:

Por rectas:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{k^m x^{2m}}{(1+k^2)x^2} = \frac{k^m}{1+k^2} \lim_{x\to 0} x^{2(m-1)} .$$

Por tanto, el límite no existe si $m \in (0,1]$.

Para $m > 1$, usamos que

$xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, luego

$$\frac{(xy)^m}{x^2+y^2} = (xy)^{m-1} \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}(xy)^{m-1} .$$

Por tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ si $m > 1$.

En resumen, si $m \in (0,1] \rightarrow$ disc. esencial en $(0,0)$.

si $m > 1 \rightarrow$ disc. evitable, y podemos definir

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Al igual que pasaba para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se cumplen los siguientes teoremas de acotación:

Teorema: (Acotación)

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua con D cerrado y acotado, entonces

f es acotada, i.e., $\exists M > 0 / \ |f(\vec{x})| \leq M$.

Teorema: (Weierstrass)

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua con D cerrado y acotado $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f alcanza su mín. y máx. absoluto en D.

Es decir, $\exists \vec{x}_{mín}, \vec{x}_{máx} \in D /$

$$f(\vec{x}_{mín}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_{máx}) \quad \forall \vec{x} \in D.$$

- Terminamos el tema extendiendo las definiciones de límite y continuidad para campos vectoriales

- **Def.:** $\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene límite $\vec{L}$ en $\vec{x}_0$ si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 /$

$$\vec{x} \in D(\vec{f}) \cap B_\delta(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\} \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) \in B_\varepsilon(\vec{L}).$$

Es decir,

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L} \iff \lim_{\|\vec{x} - \vec{x}_0\| \to 0} \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}\| = 0.$$

Nota: Se tiene la siguiente caracterización:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L} \iff \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = L_i \quad \forall i=1,2,\dots,m.$$

(más útil para calcular).

$\ulcorner$ En efecto,

$$\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{L}\| = \sqrt{(f_1(\vec{x})-L_1)^2 + \dots + (f_m(\vec{x})-L_m)^2}\,, \text{ luego}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ si $f_k(\vec{x})-L_k \to 0$ para $k=1,\dots,m$, entonces $\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{L}\|\to 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ si $\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{L}\|\to 0$, como es suma de términos no negativos, cada término ha de ir a cero. $\lrcorner$

→ De igual forma, decimos que $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}_0$ si

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0),$$

o equivalentemente, si todas las funciones componente $f_i(\vec{x})$ lo son.

• Ejercicios: límites y continuidad

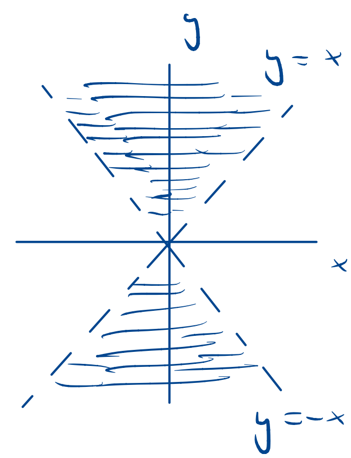
Dada $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n$, determinar:

1) Dominio de f. ¿Es éste abierto, cerrado, acotado?

2) Curva de nivel de f que pasa por $(1,2)$. Representarla.

Sol: $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left|\frac{x}{y}\right|<1\}=$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1<\frac{x}{y}<1\}$.



Es abierto, (no cerrado), no acotado.

2) $f(x,y)=c=f(1,2)$. Esto es, la curva

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Calculando la suma:

Curva de nivel

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{x}{y}}=\frac{y}{y-x}\Rightarrow\frac{y}{y-x}=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=2x.$$

$\boxed{\text{Clase 6}}$: Ejercicios

→ Hoja de problemas:

$\boxed{1.}$ j) , $\boxed{2.}$ c) $\boxed{3.}$ b) $\boxed{4.}$ b), e), d), g), h)

$\boxed{5.}$ c) , $\boxed{8.}$ b)