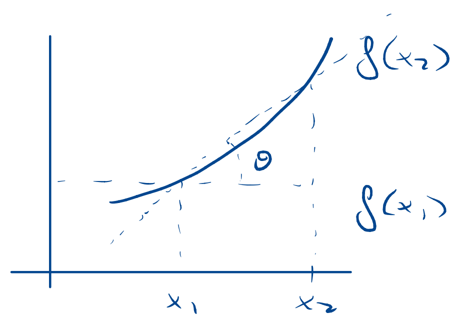
$\boxed{\text{Clase 7}}$: Derivadas parciales

- Derivada en $\mathbb{R}$: Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, queremos estudiar como varía la imagen $f(x)$ al variar el dato x:

$$\text{Cambio } \underbrace{x_1 \text{ por } x_2}_{\Delta x} \rightsquigarrow \underbrace{f(x_1) \to f(x_2)}_{\Delta f(x)}$$

¿ $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$?



$$\tan(\theta) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

[pendiente de la recta]

En el límite $\Delta x \to 0$, tenemos la derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- Pensemos ahora en una función de dos variables. Por ejemplo, la densidad de un gas ideal en función de la presión y temperatura:

$$\rho = \rho(p,T)$$

¿Cómo cambia ρ si modifico p y T? [*]

Está claro que si mantenemos la presión constante, $p = c$, y variamos T, tenemos entonces una función de una variable, $\rho = \rho(c,T) = \tilde{\rho}_c(T)$.

De forma que la variación de ρ con T, a presión constante, viene dada por $\tilde{\rho}_c'(T)$.

Análogamente si mantenemos T constante y modificamos la presión.

¿Y si cambiamos T y p a la vez?

• <u>Def</u>: Derivada parcial

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La derivada parcial de f respecto de x_k en $\vec{x}_0$ es el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{e}_k) - f(\vec{x}_0)}{h},$$

y se denota como $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0)$.

<u>Nota</u>: También se denota a veces como $\partial_{x_k} f(\vec{x}_0)$, $f_{x_k}(\vec{x}_0)$.

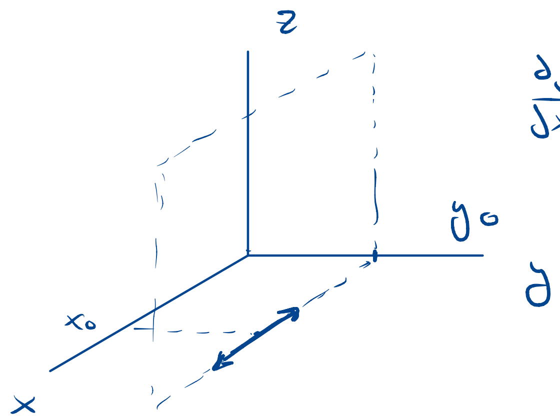
• Para $n = 2$, tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

Se tiene una interpretación geométrica similar al caso de una variable:

$f(x,y) \rightsquigarrow$ Gráfica $z = f(x,y)$

¿ $\frac{\partial f}{\partial x}$? $\longrightarrow$ Variación en x manteniendo y cons^{te}.



$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \equiv$ pendiente en (x_0,y_0) de la recta tangente a la curva de intersección del grafo con el plano $y = y_0$

¿ Cómo se calculan?

En la práctica, para calcular $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ basta con pensar en $f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$ como una función sólo de x_k, con el resto de variables fijas, como si fuese parámetros.

- Ejemplo: $f(x,y) = x^2 y + \sin(xy)$.

1) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

2) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en cualquier punto (x,y).

Sol:

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + \sin(h)}{h} = 1,$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,1+h) - f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$

2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$? De primeras puede ayudar definir una función con $y = y_0$ fijo:

$g(x) = x^2 y_0 + \sin(x y_0) \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0) = g'(x) = 2x y_0 + \cos(x y_0) y_0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y \cdot \cos(xy)$

De igual forma, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + x\cos(xy).$

Nota: Por supuesto, si sustituimos $x=0$, $y=1$, recuperamos los resultados de 1).

- Ejemplo: Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$:

1) $f(x,y) = 2x^2 + 4xy,$

2) $f(x,y) = \sin(xy + y)$,

3) $f(x,y) = (1 + x^3)y^2$,

4) $f(x,y) = e^x \sin(y)$.

Sol: 1) $\partial_x f(x,y) = 4x + 4y$, $\partial_y f(x,y) = 4x$,

2) $\partial_x f(x,y) = \cos(xy + y)y$, $\partial_y f(x,y) = \cos(xy+y)(1+x)$,

3) $\partial_x f(x,y) = 3x^2 y^2$, $\partial_y f(x,y) = 2y(1+x^3)$,

4) $\partial_x f(x,y) = e^x \sin(y)$, $\partial_y f(x,y) = e^x \cos(y)$.

- Notas:

1) f continua $\not\Rightarrow$ existencia de las derivadas parciales.

[Como en una variable]

2) Existencia de todas las derivadas parciales en $\vec{x}_0$ $\not\Rightarrow$ f continua en $\vec{x}_0$.

Es decir, (al contrario que en 1d) una función puede tener derivadas parciales bien definidas en un punto pese a no ser continua!

Ejemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0. \end{cases}$$

Claramente,

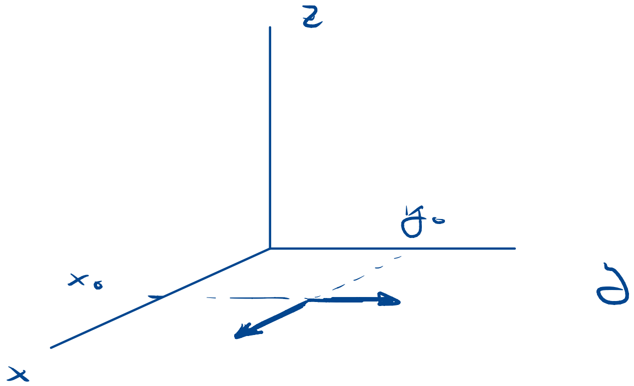
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

pero f es discontinua en $(0,0)$, ya que

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \text{ pues } \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = 0 \quad //.$$

- Volvamos a la pregunta [*]. ¿Cómo calcular los cambios en f si modificamos varias variables a la vez?



$$\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$\boxed{\text{Clase } 8}$: Diferenciabilidad

- Def.: Derivada direccional

Dada $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ vector unitario $(\|\vec{u}\| = 1)$, se llama derivada direccional de f en $\vec{x}_0$ en la dirección $\vec{u}$, y se denota por $D_{\vec{u}} f(\vec{x})$, al límite

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h}.$$

- Notas:

1) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ son las derivadas direccionales en las direcciones $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 (0,1)$.

2) Analogía con 1d:

$$f'(x) \sim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}, \quad D_{\vec{u}} f(\vec{x}) \sim \frac{\Delta_{\vec{u}} f(\vec{x})}{\|\Delta \vec{x}\|} \quad \left(\begin{array}{l} \Delta \vec{x} = h\vec{u}, \\ \|\Delta \vec{x}\| = h \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \end{array} \right)$$

Ejemplo: Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $(1,2)$ en la dirección de la recta $y = x$.

Sol:

La recta $y=x$ tiene por dirección

$$\frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ luego}$$

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}, 2+\frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(1,2)}{h} =$$

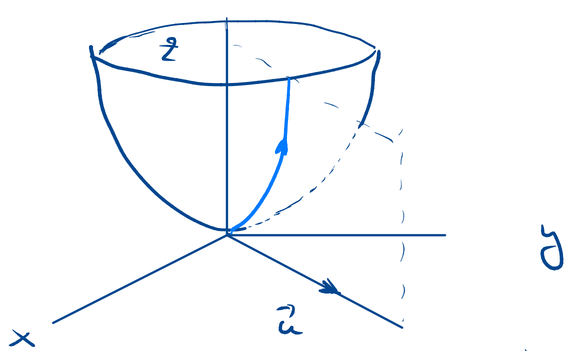
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(2+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - 5}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + \frac{6}{\sqrt{2}}h}{h} = \frac{6}{\sqrt{2}}.$$

→ Interpretación y cálculo de la derivada direccional.

$D_{\vec{u}} f(\vec{x})$ mide la tasa de variación de f al mover $\vec{x}$ en la dirección $\vec{u}$.

En $\mathbb{R}^2$, su valor corresponde a la pendiente de la recta tangente a la curva formada por la intersección del grafo $z = f(x,y)$ y el plano vertical con dirección $\vec{u}$,



• Cálcul de $D_{\vec{u}} f(\vec{x})$:

Usar la definición (límite) no es muy práctico.
Veamos otra forma:

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h}$$

Por simplificar, pensemos en 2d:

$$D_{(u_1,u_2)} f(x,y) \sim \frac{f(x+hu_1, y+hu_2) - f(x,y)}{h}.$$

Sumamos y restamos:

$$\frac{f(x+hu_1, y+hu_2) - f(x,y)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+hu_1, y+hu_2) - f(x, y+hu_2) + f(x, y+h_2) - f(x,y)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+hu_1, y+hu_2) - f(x, y+hu_2)}{h} + \frac{f(x, y+hu_2) - f(x,y)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+hu_1, y+hu_2) - f(x, y+hu_2)}{hu_1} u_1 +$$

$$+ \frac{f(x, y+hu_2) - f(x,y)}{hu_2} u_2 \qquad \boxed{*} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow D_{(u_1,u_2)} f(x,y) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$$

$$= (u_1,u_2)\cdot\left(\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)\right)$$

→ Por tanto, si conocemos las derivadas parciales, podemos calcular cualquier derivada direccional. (*)

• Def: Vector gradiente

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\partial_{x_1} f(\vec{x}), \partial_{x_2} f(\vec{x}), \ldots, \partial_{x_n} f(\vec{x})\right).$$

Por tanto, $\boxed{D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \vec{u}\cdot\nabla f(\vec{x})}$ (*)

(no siempre válida)

→ (*) Lo anterior no siempre es cierto !

En el paso $\boxed{*}$ hemos usado que las derivadas parciales existen y son continuas en el punto (x,y), lo cual no siempre es cierto.

• Ejemplo: Ej. $\boxed{7}$ Hoja 2.

Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

a) Continuidad de f en el origen.

b) $D_{\vec{u}}f(0,0)$ para cualquier dirección $\vec{u}$.

c) Encontrar $\vec{u}$ / $D_{\vec{u}}f(0,0)\neq \vec{u}\cdot\nabla f(0,0)$.

Sol:

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{2x^2+y^2}\,\frac{y}{2}=0.$$
$$\uparrow$$
$$0\leq\left|\frac{2x^2}{2x^2+y^2}\,\frac{y}{2}\right|\leq\frac{1}{2}|y|$$

b) Sea $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $\|\vec{u}\|=1$.

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(hu_1,hu_2)-f(0,0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\,\frac{(hu_1)^2\,hu_2}{2(hu_1)^2+(hu_2)^2}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\cancel{h}}\,\frac{\cancel{h^3}\,u_1^2u_2}{\cancel{h^2}(2u_1^2+u_2^2)}=$$

$$=\frac{u_1^2u_2}{2u_1^2+u_2^2}.$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)} f(0,0) = 0,$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)} f(0,0) = 0,$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)} f(0,0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)} f(0,0) = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, para cualquier $\vec{u}$ con $u_1 u_2 \neq 0$,

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \frac{u_1^2 u_2}{2u_1^2 + u_2^2} \neq 0 = \vec{u} \cdot \nabla f(0,0).$$

Por ejemplo, $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

- Veamos cuándo (*) es cierto.

Recordamos que en una variable, ser derivable en un punto x significa que existe $f'(x)$, lo cual implicaba que $f(x)$ se aproximaba bien localmente por su recta tangente:

$$\exists\, f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{recta tangente}} + o(x - x_0)$$

Esto es, $f(x)$ está bien aproximada por una función lineal:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{x - x_0} = 0$$

• Def: Se dice que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si existe una aplicación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ /

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - T(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0 .$$

La aplicación lineal T se llama diferencial de f en $\vec{x}_0$ y se denota $Df(\vec{x}_0)$.

Nota: Ser diferenciable significa pues que f se puede aproximar bien por la aplicación lineal $Df(\vec{x}_0)$:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) + R(\vec{x}, \vec{x}_0),$$

con $R(\vec{x}, \vec{x}_0) = o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$, es decir,

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{R(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0 .$$

¿ Quién es $Df(\vec{x})$? ¿ Cuándo es f diferenciable?

• Proposición: Si f es diferenciable en $\vec{x}_0$, entonces:

1) $Df(\vec{x}_0)$ es única. [Prueba: por contracción]

2) f es continua en $\vec{x}_0$.

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)-T(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} = 0 \Rightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) \qquad \blacksquare$$

• Proposición: Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x}_0$, entonces:

1) $Df(\vec{x}_0)(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{x} \qquad \forall \vec{x}$

2) $D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = \vec{u}\cdot\nabla f(\vec{x}_0) \qquad \forall \vec{u},\ \|\vec{u}\|=1,$

Notas: 1) $\exists$ derivadas parciales $\not\Rightarrow$ diferenciabilidad (es más, no implica ni continuidad).

2) f continua y $\exists$ der. parciales $\not\Rightarrow$ diferenciabilidad.

Ej: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ es continua en $(0,0)$, $\exists\, \partial_x f(0,0),\ \partial_y f(0,0)$, pero no es diferen. en $(0,0)$.

→ ¿Cómo probamos que f no es diferenciable?

Buscamos alguna contradicción con las proposiciones anteriores:

1) f no continua $\Rightarrow$ f no diferenciable

2) $\nexists$ alguna derivada parcial o direccional $\Rightarrow$ f no diferenciable

3) Si f es continua y $\exists$ todas las parciales, argumentamos como sigue:

Si f es diferenciable en $\vec{x}_0$ $\Rightarrow$ $Df(\vec{x}_0)(\vec{x}) = \vec{x}\cdot\nabla f(\vec{x}_0)$ $\forall \vec{x}$

y ha de verificar la definición de diferenciabilidad:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)-(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\nabla f(\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} = 0.$$

• En el ejemplo anterior:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0 \quad \left(\text{pues } \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq |x| \to 0\right)$$

por tanto f es continua en $(0,0)$.

$$\left.\begin{aligned} \partial_x f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = 0 \\ \partial_y f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos la diferenciabilidad:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot\big((x,y)-(0,0)\big)}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Vemos que no existe:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{|x|^3(1+m^2)^{3/2}} \longrightarrow \nexists \text{ límite doble} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$ //.

- Teorema: [Condición suficiente de diferenciabilidad]

$\exists$ derivadas parciales en $B_\varepsilon(\vec{x}_0)$ y son continuas en $\vec{x}_0$ $\Big|\Longrightarrow f$ es diferenciable en $\vec{x}_0$

Nota: No es una condición necesaria. Es decir, existen funciones diferenciables en $\vec{x}_0$ cuyas parciales no son continuas en $\vec{x}_0$.

Esto también ocurre en una variable:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \longrightarrow f'(x) = 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

no es continua en $x=0$.

En efecto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{, luego}$$

$f(x)$ es derivable con $f'(0)=0$. $\lrcorner$

En $\mathbb{R}^2$, por ejemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$ pero $\partial_x f, \partial_y f$ no son continuas en $(0,0)$.

¿por qué?

Hemos de encontrar una aplicación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - 0 - T(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

De ser diferenciable, tendríamos $T(0,0)(x,y) = (x,y)\cdot \nabla f(0,0)$.

Calculamos $\nabla f(0,0)$:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = 0,$$

e igualmente $\partial_y h(0,0)=0$. Por tanto, $\nabla f(0,0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Comprobamos la diferenciabilidad:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \text{ pues}$$

$$|f(x,y)| \leq \left| \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2}{|x|} + \frac{y^2}{|y|} \leq |x| + |y| \to 0.$$

Por tanto, f es diferenciable en $(0,0)$.

Se comprueba fácilmente sin embargo que $\partial_x f, \partial_y f$ no son continuas en $(0,0)$. //

• Def: $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice de clase C^1 en D si sus derivadas parciales son continuas en D.

$\equiv$ "f es continuamente diferenciable".

Clases 9, 10: Vector gradiente, curvas de nivel, plano tangente.

Hemos visto el concepto de derivada direccional como tasa de cambio de f en una dirección.
En el caso de f diferenciable tenemos que

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \vec{u} \cdot \nabla f(\vec{x}).$$

Nota: Máximo crecimiento/decrecimiento.

Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces la dirección dada por el gradiente es la dirección de máximo crecimiento de f.

En efecto,

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ (f \text{ diferenciable})}}{=} \vec{u} \cdot \nabla f(\vec{x}) = \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \|\nabla f(\vec{x})\| \underbrace{\cos\theta}_{\in[-1,1]}, \quad \theta = \text{ángulo entre } \vec{u} \text{ y } \nabla f(\vec{x}).$$

El valor máximo se da para $\cos\theta = 1$, es decir, $\theta = 0$, es decir, $\vec{u} \parallel \nabla f(\vec{x})$.
Análogamente, el máximo decrecimiento se da en la dirección de $-\nabla f(\vec{x})$.

→ Igualmente, $D_{\vec{u}} f(\vec{x}) = 0$ en direcciones $\vec{u} \perp \nabla f(\vec{x})$.

- **Teorema: [Regla de la cadena]**

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable y
$\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ derivable.

Entonces, $g = f \circ \vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto g(t) = f(\vec{\gamma}(t))$

es derivable y $\boxed{g'(t) = \nabla f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)}$

Idea ("prueba"): Para $n = 2$.

$\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ curva.

$g(t) = f(x(t), y(t))$

$$g'(t) \longrightarrow \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} =$$

$$= \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t+h))}{h} +$$

$$+ \frac{f(x(t), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} =$$

$$= \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t+h))}{x(t+h) - x(t)} \; \frac{x(t+h) - x(t)}{h} +$$

$$+\frac{f(x(t),y(t+h))-f(x(t),y(t))}{y(t+h)-y(t)}\,\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\cdot x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\cdot y'(t)=$$

$$=\nabla f(x(t),y(t))\cdot(x'(t),y'(t)).$$

- Podemos ahora pensar en las derivadas direccionales de la siguiente forma:

$D_{\vec{u}}f(\vec{x}_0)\equiv$ tasa de cambio de f a lo largo de la recta que pasa por $\vec{x}_0$ en dirección $\vec{u}$.

En efecto: Recta por $\vec{x}_0$ con dirección $\vec{u}$ $\rightarrow$ $\vec{x}(t)=\vec{x}_0+t\vec{u}$

$$\frac{d}{dt}f(\vec{x}(t))\underset{\substack{\uparrow\\(f\text{ diferenciable})}}{=}\nabla f(\vec{x}(t))\cdot\vec{x}'(t)=\nabla f(\vec{x}(t))\cdot\vec{u}=D_{\vec{u}}f(\vec{x}(t))$$

• Ejercicio: Sea $f(x,y) = xy$, $P_0 \equiv (1,1)$, $\vec{u} = (2,1)$.

1) Calcular $\nabla f(1,1)$, deriv. direccional en P_0 dirección $\vec{u}$.

2) Dibujar la curva de nivel de f que pasa por $(1,1)$, junto con $\nabla f(1,1)$.

Sol:

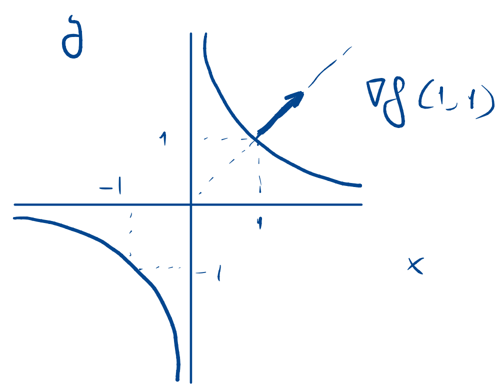
1) $\nabla f(x,y) = (y, x) \rightarrow \nabla f(1,1) = (1,1)$.

$$\vec{u}\ (2,1) \rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) \rightarrow D_{\vec{v}} f(1,1) = \vec{v} \cdot \nabla f(1,1) =$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot (1,1) = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

2) $f(x,y) = c = f(1,1) = 1$.

$\hookrightarrow xy = 1 \leftrightarrow y = \frac{1}{x}$



• Propiedad: Gradiente y curvas de nivel.

Para $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable,

en cualquier punto de una curva de nivel de f,
el gradiente de f en ese punto es perpendicular a la curva.

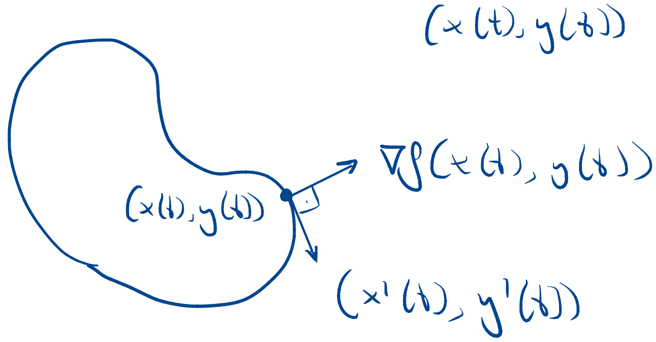
En efecto:

Sea $(x(t), y(t))$ una parametrización de la curva de nivel $f(x(t), y(t)) = c$, $(t \in I)$.

Entonces,

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \partial_x f(x(t), y(t))\, x'(t) + \partial_y f(x(t), y(t))\, y'(t) =$$

$$= \underbrace{\nabla f(x(t), y(t))}_{\substack{\text{Gradiente en} \\ (x(t),\, y(t))}} \cdot \underbrace{(x'(t), y'(t))}_{\substack{\text{vector tangente a} \\ \text{la curva en } (x(t),\, y(t)).}}$$



→ Aplicación: Podemos calcular la recta tangente y normal a cualquier curva definida implícitamente $f(x, y) = 0$ calculando su gradiente.

¿cómo?

• Ejercicio: Sea la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la elipse en el punto $(2, \frac{5}{3})$.

Sol: Definimos $f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5}$

Elipse: curva de nivel $f(x,y) = 1$.

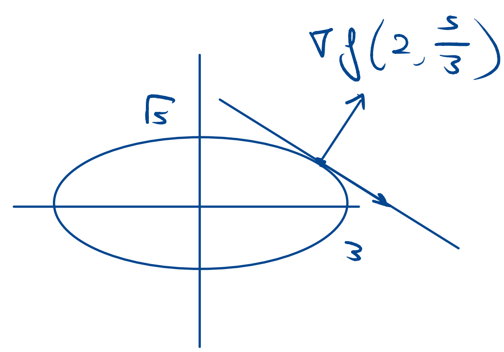
Tenemos que $\nabla f(2, \frac{5}{3}) = \left(\frac{2}{9}\cdot 2, \frac{2}{5}\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right)$ es

perpendicular a la elipse en $(2, \frac{5}{3})$.

Por tanto:

- Recta normal: recta por $(2, \frac{5}{3})$ en la dirección $(\frac{4}{9}, \frac{2}{3})$,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4/9 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



- Recta tangente:

Son los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^2 /$

$$\left(\vec{x} - (2, \tfrac{5}{3})\right) \cdot \nabla f(2, \tfrac{5}{3}) = 0.$$

Es decir: $$(x-2)\frac{4}{9} + \left(y - \frac{5}{3}\right)\frac{2}{3} = 0.$$

- Nota: En general, dada $f(x,y) = c$:

1) Recta tangente en (x_0, y_0): $\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$,

2) Recta normal en (x_0,y_0): $\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \partial_x f(x_0,y_0)t \\ y(t) &= y_0 + \partial_y f(x_0,y_0)t \end{aligned}\right\}$

- ## Gradiente y plano tangente:

Pensemos ahora en superficies de nivel:

La superficie $f(x,y,z)=0$ puede verse como una superficie de nivel de la función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.
Estudiamos la variación de f a lo largo de una curva cualquiera en esa superficie de nivel:

$(x(t),y(t),z(t))$ curva en la superficie de nivel $\Rightarrow f(x(t),y(t),z(t))=0 \longrightarrow$ $(\forall t\in I)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(x(t),y(t),z(t)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(x(t),y(t),z(t))\cdot(x'(t),y'(t),z'(t)) = 0$$

Es decir,

$\nabla f(\vec{x}_0)$ es perpendicular a todas las curvas en la superficie de nivel que pasan por $\vec{x}_0$.

Es decir, $\nabla f(\vec{x}_0)$ es el vector normal a la superficie $f(x,y,z)=0$.

• **Def.:** Plano tangente

El plano tangente a la superficie $f(x,y,z)=c$ en (x_0,y_0,z_0) es el plano que pasa por ese punto y con vector normal $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$.

Nota: El plano es tangente a todas las curvas en la superficie que pasan por el punto.

Ecuación:

$$\boxed{(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot \nabla f(\vec{x}_0)=0}$$

Plano tangente a $f(\vec{x})=c$ en $\vec{x}_0$

• Igualmente, la recta normal a $f(x,y,z)=c$ en (x_0,y_0,z_0) es la recta por (x_0,y_0,z_0) en la dirección del gradiente:

$$\boxed{\vec{x}(t)=\vec{x}_0+\nabla f(\vec{x}_0)\,t}$$

$(t\in\mathbb{R})$

Recta normal a $f(\vec{x})=c$ en $\vec{x}_0$

→ **Ejercicios:** (Hoja 2) $\boxed{4}$ a), $\boxed{5}$, $\boxed{9}$, $\boxed{6}$ j), k), m), $\boxed{26}$.