$\boxed{\text{Clases 39, 40}}$: Campos conservativos.

Dada $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $\vec{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva regular,

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}\,'(t)\,dt$$

<u>Nota</u>: El valor de $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$ es independiente, salvo el signo, de parametrizaciones equivalentes.

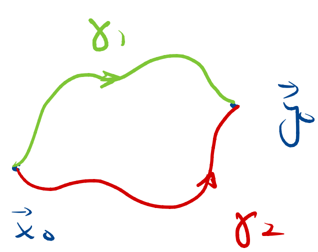
[si misma orientación → igual valor
si orientación contraria → signo contrario]

Por ello a veces se denota

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \int_C \underbrace{(f_1\,dx_1 + \dots + f_n\,dx_n)}_{\text{"1-forma diferencial" asociada al campo } \vec{f}.}$$

Pero, en general, la integral de $\vec{x}_0$ a $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ <u>sí</u> depende del camino,

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{\ell} \neq \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$



→ Objetivo: Estudiar condiciones que debe cumplir el campo $\vec{f}$ para que la integral de línea solo dependa de los extremos.

• Def: Decimos que un campo vectorial continuo $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial gradiente si existe un campo escalar $f: D \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con $F = \nabla f$.
En ese caso, f se llama potencial de F.

$$\underbrace{F}_{\text{campo gradiente}} = \underbrace{\nabla f}_{\text{función potencial}}$$

• Teorema: [Fundamental del cálculo vectorial]

$$\left.\begin{array}{l} f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f \in C^1 \\ \gamma: [a,b] \to D \\ \quad C^1\text{-regular a trozos} \end{array}\right\} \to \int_\gamma \nabla f \cdot d\vec{\ell} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Por tanto, si F campo gradiente con potencial f, para cualquier curva conectando p a q se tiene que

$$\int_\gamma F \cdot d\vec{\ell} = f(q) - f(p).$$

· <u>Dem:</u> Basta definir
$$\left.\begin{array}{l} g:[a,b]\to\mathbb{R} \\ t\mapsto g(t)=f(\gamma(t)) \end{array}\right\}$$

Así,

$$g'(t)=\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \nabla f\cdot d\vec{l} = \int_a^b \nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b g'(t)\,dt =$$

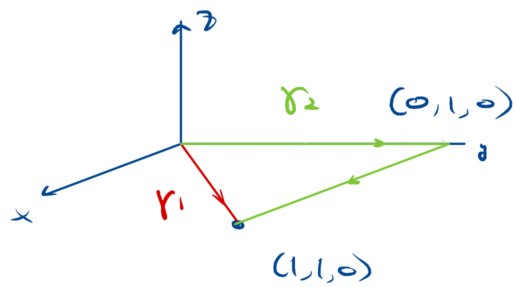
$$= g(b)-g(a) = f(\gamma(b))-f(\gamma(a)) \,/\!/.$$

<u>Nota:</u> Acabamos de ver que si F es un campo gradiente ($F=\nabla f$), entonces su integral de línea entre dos puntos cualesquiera <u>no</u> depende del camino.

→ Veamos que, al contrario que en una variable, no toda función $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es un campo gradiente.

<u>(Contra)Ejemplo:</u>
$$\left.\begin{array}{l} F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \\ (x,y,z)=(xy,y,z) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1:[0,1]\to\mathbb{R}^3 \\ t\mapsto\gamma_1(t)=(t,t,0) \end{array}\right\}$$



- $$\int_{\gamma_1} F\cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (t^2, t, 0)\cdot(1,1,0)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (t^2+t)\,dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

$$\gamma_2 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \gamma_2(t) = \begin{cases} (0,t,0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ (t-1,1,0) & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_2} F\cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 (0,t,0)\cdot(0,1,0)\,dt + \int_1^2 (t-1,1,0)\cdot(1,0,0)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1\right) = 1 \neq \frac{5}{6}.$$

Por el T^{er} criterio, como la integral de F de $(0,0,0)$ a $(1,1,0)$ depende del camino, F no puede ser un campo gradiente $\Rightarrow \nexists\, g \,/\, F = \nabla g$.

- F campo gradiente $\Longrightarrow$ Integrales de línea de F no dependen del camino.

¿ $\Longleftarrow$? ✓

• <u>Def</u>: • Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ es conexo si cualesquiera $\vec{x}, \vec{y} \in D$ se pueden unir por curvas contenidas en D.

• $D \subset \mathbb{R}^n$ es simplemente conexo si toda curva cerrada en D puede reducirse continuamente hasta un punto de la misma sin salirse de D.

conexo
simplemente conexo

conexo
no simplemente conexo.

• <u>Teorema</u>: Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuo, D abierto conexo. Son equivalentes:

1) F es un campo gradiente, i.e., $\exists f: D \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ / $F = \nabla f$,

2) $\int_\gamma F \cdot d\vec{l} = 0$ $\forall$ curva γ en D simple, cerrada y C^1 a trozos,

3) Las integrales de línea de F no dependen del camino.

Nota: Si F cumple alguna de estas propiedades (y por tanto todas), se dice que

$$\boxed{F \text{ es un campo conservativo}}$$

(i.e., F conservativo $\Longleftrightarrow \exists\, g \in C^1 \,/\, F = \nabla g$).

- **Dem:**

$\boxed{1) \Longrightarrow 2)}$ Ya probado con el T$^{\text{ma}}$ Fundamental.

$\boxed{2) \Longrightarrow 3)}$

Sea $\tilde{\gamma} = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$, que es cerrado, luego

$$\int_{\tilde{\gamma}} F\cdot dl = 0 = \int_{\gamma_1} F\cdot dl + \int_{(-\gamma_2)} F\cdot dl = \int_{\gamma_1} F\cdot dl - \int_{\gamma_2} F\cdot dl \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_1} F\cdot dl = \int_{\gamma_2} F\cdot dl$$

$\boxed{3) \Longrightarrow 1)}$ Vamos a probarlo de forma constructiva, calculando un potencial para F.

Dado $a \in D$, como D es conexo, dado cualquier $x \in D$ podemos escoger un camino C^1 a trozos conectando a con x: $\left.\begin{array}{l}\gamma_x : [0,1] \to D \\ \gamma_x(0) = a,\ \gamma_x(1) = x\end{array}\right\}$

Definimos $\displaystyle f(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot d\vec{\ell}$ para cada $x \in D$.

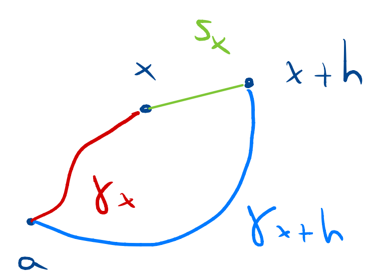
Por hipótesis, la definición de f no depende de la elección de γ_x.

Falta ver que 1) $f \in C^1$

2) $\nabla f(x) = F(x) \quad \forall x \in D$.

$\to$ f diferenciable en $x \in \mathbb{R}^n$ con $\nabla f(x) = F(x)$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - F(x) \cdot h}{\|h\|} = 0.$$



Veamos: por hipótesis, las integrales de línea de F no dependen del camino. Luego,

$s_x \equiv$ segmento de x a $x+h$

$s_x(t) = x + th,\ t \in [0,1]$

$$f(x+h) = \int_{\gamma_{x+h}} F \cdot d\vec{\ell} = \underbrace{\int_{\gamma_x} F \cdot d\vec{\ell}}_{= f(x)} + \int_{s_x} F \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+h) - f(x) = \int_{s_x} F \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 F(x+th) \cdot h \, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-F(x)\cdot h}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^1 (F(x+th)-F(x))\cdot h\,dt}{\|h\|} = 0,$$

por regla de Sandwich,

$$\frac{\left\| \int_0^1 (F(x+th)-F(x))\cdot h\,dt \right\|}{\|h\|} \leq \frac{\|F(x+th)-F(x)\|\,\|h\|}{\|h\|} =$$

$$= \|F(x+th)-F(x)\| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

pues F continua ✓

→ ¿Cómo saber si un campo es conservativo?

- ¿Es un gradiente?
- $\int_\gamma F\cdot d\vec{x} = 0 \quad \forall \gamma$ cerrado?
- Independencia del camino?

} No son fáciles de comprobar (*)

(*) Son útiles para probar si F <u>no</u> es conservativo (basta encontrar dos caminos entre dos puntos cuyas integrales de línea sean distintas).

→ Si F es conservativo, ¿cómo saberlo?

<u>Proposición</u>: [Condición necesaria de campos conservativos]

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo conservativo, $F \in C^1$ en D.
Entonces
$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \qquad \forall\, i,j \in \{1, \dots, n\}$$

<u>Dem</u>: F conservativo $\Rightarrow \exists\, g \in C^1 \,/\, F = \nabla g$.

Si $F \in C^1 \Rightarrow g \in C^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Por T}^{\text{a}} \text{ Schwarz}, \quad \underbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}}_{\frac{\partial F_i}{\partial x_j}} = \underbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}}_{\frac{\partial F_j}{\partial x_i}} \quad //$$

<u>Nota</u>: Para $n=2$, $n=3$, la condición necesaria queda

- $F = (F_1, F_2) \rightsquigarrow \partial_x F_2 = \partial_y F_1$.
- $F = (F_1, F_2, F_3) \rightsquigarrow \partial_x F_2 = \partial_y F_1,\ \partial_x F_3 = \partial_z F_1,\ \partial_z F_2 = \partial_y F_3$.

<u>Nota</u>: En $\mathbb{R}^3$, se tiene el operador "rotacional",

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}, \text{ esto es,}$$

$$\nabla \times F = \left(\partial_y F_3 - \partial_z F_2 , \partial_z F_1 - \partial_x F_3 , \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \right),$$

que en $\mathbb{R}^2$ se reduce a

$$\nabla \times F = \partial_x F_2 - \partial_y F_1$$

- Def: Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable. Si

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j = 1, \ldots, n,$$

se dice que F es cerrado.

Cuando $n = 2, 3$, F cerrado $\equiv \nabla \times F = 0$ "irrotacional"

Así, $\boxed{F \text{ conservativo} \Rightarrow F \text{ cerrado}}$

$$\left[F = \nabla g \Rightarrow \nabla \times F = 0 \right]$$

- Veamos ahora condiciones suficientes para que F sea conservativo.

Lema: [de Poincaré]

Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en D conjunto abierto y simplemente conexo. Si F es cerrado en D, entonces F conservativo en D.

En tal caso, un potencial de F es

$$g(x) = \int_{\gamma_x} F\cdot d\vec{\ell}\,, \quad \gamma_x \equiv \text{camino entre } a\in D \text{ y } x.$$

Nota: La prueba sigue como $\boxed{3) \longrightarrow 1)}$ en p.200, una vez que se prueba que $\int_{\gamma_x} F\cdot d\vec{\ell}$ no depende del camino γ_x. Para ello se usa que D es simplemente conexo.

[*] Lo veremos más adelante $\to$ T$^{\underline{ma}}$ Green.

Ejemplo: Sea $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$.

Este campo es de clase C^1 y cerrado en $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

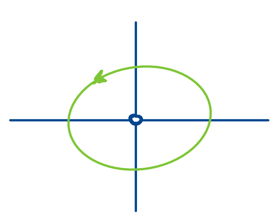
$$\left.\begin{aligned} \partial_y F_1(x,y) &= \frac{-(x^2+y^2)+y\,2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \partial_x F_2(x,y) &= \frac{x^2+y^2-x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla\times F = 0.$$

Sin embargo, si $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t\in[0,2\pi]$,

$$\oint_\gamma F\cdot d\ell = \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t))\cdot(-\sin(t), \cos(t))\,dt = 2\pi \neq 0$$

$\Rightarrow$ F no es conservativo.

! $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no es un dominio simplemente conexo.



Nota: Podemos notar que si $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, tenemos que $\nabla f(x,y) = F(x,y)$.

pero sólo si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, pues $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ no es continua en el eje x (por tanto $f \in C^1(D)$).