$\boxed{\text{Clase 41}}$: Ejercicios

Repaso:

- $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conservativo (en D) si procede de un potencial, i.e.,

$$\exists f: D \to \mathbb{R},\ f \in C^1(D) \,/\, F = \nabla f.$$

- F conservativo $\iff \displaystyle\int_\gamma F \cdot d\ell = 0 \quad \forall \gamma \subset D$ curva cerrada

$\iff$ Independencia del camino

- $F \in C^1(D)$ conservativo $\implies$ F irrotacional, i.e.,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad (\nabla \times F = 0)$$

- $\left.\begin{array}{l} F \in C^1(D) \text{ irrotacional} \\ D \text{ simplemente conexo} \end{array}\right| \to$ F conservativo en D.

→ Dado F conservativo, su potencial puede obtenerse como sigue: Para $x_0 \in D$ fijo,

$$f(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot d\vec{\ell} \quad \text{con } \gamma_x \equiv \text{camino de } x_0 \text{ a } x.$$

Al ser F conservativo, γ_x es cualquier curva conectando x_0 con x.

- <u>Ejercicio:</u> Determinar si el campo vectorial $F(x,y) = (3x^2 + y, x + 2y)$ es conservativo, y en tal caso calcular su potencial.

<u>Sol:</u> $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ abierto, simplemente conexo.

$F \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Vemos que $\nabla \times F = 0$: $\begin{cases} \partial_y F_1(x,y) = 1 \\ \partial_x F_2(x,y) = 1 \end{cases}$

Por Lema de Poincaré, F es conservativo. Es decir,

$\exists\, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ / $F = \nabla g$.

- Determinamos g:

"Procedimiento mecánico para calcular el potencial" (sabiendo previamente que existe)

$$\begin{cases} ① \ \partial_x g(x,y) = F_1(x,y) = 3x^2 + y \\ ② \ \partial_y g(x,y) = F_2(x,y) = x + 2y \end{cases}$$

$$① \Rightarrow g(x,y) = x^3 + xy + h(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_y g(x,y) = x + h'(y) \overset{②}{=} x + 2y \Rightarrow h'(y) = 2y \Rightarrow$$

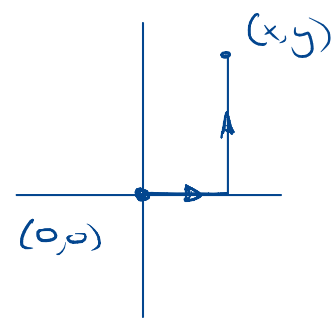
$$\Rightarrow h(y) = y^2 + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x,y) = x^3 + xy + y^2 + C.$$

Nota: Observad que el proceso anterior realmente consiste en lo siguiente. Como F es conservativo, ya probamos que su potencial (único salvo constante) es

$$g(\vec{x}) = \int_{\gamma_{\vec{x}}} F \cdot d\vec{\ell} \quad \text{con } \gamma_{\vec{x}} \text{ camino de } \underbrace{\vec{x}_0}_{\text{cualquiera, fijo, de } D} \text{ a } \vec{x}$$

Podemos en particular tomar el camino



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$,

$\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $0 \le t \le x$,

$\gamma_2(t) = (x, t)$ con $0 \le t \le y$.

Así,

$$g(x,y) = \int_0^x F(t,0)\cdot(1,0)\,dt + \int_0^y F(x,t)\cdot(0,1)\,dt =$$

$$= \int_0^x 3t^2\,dt + \int_0^y (x+2t)\,dt = x^3 + xy + y^2.$$

Ej: $\boxed{20}$ Determinar si conservativo y en tal caso calcular su potencial.

a) $F(x,y,z) = \left(\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2}, 2z - x\right)$,

b) $F(x,y) = (e^x \cos(y), -e^x \cdot \sin(y))$.

Sol:

a) $F \in C^1$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\nabla \times F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} & 2z-x \end{vmatrix} = \left(0-0,\ 0-(-1),\ \frac{-1}{y^2}+\frac{1}{y^2}\right) =$$

$$= (0,1,0) \neq (0,0,0).$$

Por tanto, F no es conservativo $\left(\left.\begin{array}{l} \text{pues } F \in C^1(D) \\ \text{conservativo} \end{array}\right| \Rightarrow \text{irrotacional} \right)$

b) $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\left.\begin{array}{l} \partial_x F_2(x,y) = -e^x \cdot \sin(y) \\ \partial_y F_1(x,y) = -e^x \sin(y) \end{array}\right| \Rightarrow \partial_y F_1(x,y) = \partial_x F_2(x,y).$$

Como
$$\left.\begin{array}{l} F \in C^1(\mathbb{R}^2) \\ F \text{ irrotacional (en } \mathbb{R}^2) \\ \mathbb{R}^2 \text{ es abierto, simplemente conexo} \end{array}\right| \xrightarrow[\text{Poincaré}]{\text{Lema}} F \text{ conservativo en } \mathbb{R}^2.$$

Potencial: $F(x,y) = \nabla g(x,y) \Rightarrow$

① $F_1(x,y) = e^x \cdot \cos(y) = \partial_x g(x,y)$,

② $F_2(x,y) = -e^x \cdot \sin(y) = \partial_y g(x,y)$.

Entonces,

$$① \Rightarrow g(x,y) = \int_0^x e^t \cos(y)\,dt = (e^x - 1)\cos(y) + h(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_y g(x,y) = -(e^x - 1)\sin(y) + h'(y) \overset{②}{=} -e^x \cdot \sin(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(y) + h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = \cos(y) + C.$$

Esto es, $g(x,y) = (e^x - 1)\cos(y) + \cos(y) + C =$

$$= e^x \cos(y) + C. \;//$$

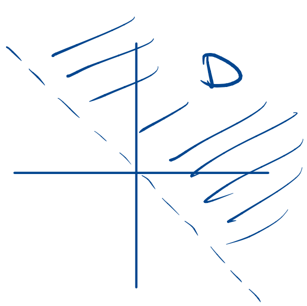
Ej.: $\boxed{23}$ $\quad f(x,y) = \left(\dfrac{y}{x+y}, \log(x+y) + \dfrac{y}{x+y} \right).$

a) ¿Conservativo en su dominio?

b) Calcula su potencial.

Sol: Dominio $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0 \}$

a)



Conjunto abierto simplemente conexo.

$$\left.\begin{aligned} \partial_x f_2(x,y) &= \frac{1}{x+y} - \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{x}{(x+y)^2} \\ \partial_y f_1(x,y) &= \frac{1}{x+y} - \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{x}{(x+y)^2} \end{aligned}\right\} \to \nabla \times f = 0.$$

$f \in C^1(D)$,
$\nabla \times f = 0$ en D,
D abierto, simplemente conexo

$\xRightarrow[\text{Poincaré}]{\text{Lema}}$ f conservativo en D.

b) $f(x,y) = \nabla g(x,y) \Rightarrow$

① $f_1(x,y) = \dfrac{y}{x+y} = \partial_x g(x,y)$

② $f_2(x,y) = \log(x+y) + \dfrac{y}{x+y} = \partial_y g(x,y)$

① $\Rightarrow g(x,y) = y \log(x+y) + h(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \partial_y g(x,y) = \log(x+y) + \dfrac{y}{x+y} + h'(y) \overset{②}{=}$

$= \log(x+y) + \dfrac{y}{x+y} \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = C \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x,y) = y \cdot \log(x+y) + C.$

Ej.: $\boxed{28}$ $F(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2} \right)$

a) ¿Es conservativo? Si sí, ¿potencial?

$F \in C^1(D)$, $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Comprobamos la condición necesaria:

$$\left.\begin{array}{l} \partial_y F_1(x,y) = \dfrac{-x}{(x^2+y^2)^2}\, 2y \\ \\ \partial_x F_2(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\, 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla \times F = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow F$ <u>puede</u> ser conservativo.

- Como D <u>no</u> es simplemente conexo, no podemos usar el lema de Poincaré.

- Probamos que es conservativo construyendo su potencial (y comprobando que es C^1 en D):

Sea $g \,/\, F = \nabla g$:

$$① \; F_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} = \partial_x g(x,y)$$

$$② \; F_2(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} = \partial_y g(x,y)$$

$$① \Rightarrow g(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + h(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_y g(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + h'(y) \overset{②}{=} \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \quad (\text{tomando } c=0).$$

Por tanto, como $g \in C^1(D)$, hemos probado que F es conservativo en D, con potencial g.

Nota: Comparar con el ejercicio donde

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \in C^1(D), \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Si calculamos $g \,/\, F = \nabla g$, llegamos a

$g(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, pero $g \notin C^1(D)$.

Eso no nos permite concluir que F sea conservativo.
De hecho, no lo es (ver pág. -205-).

Clase 42: Teorema de Green.

- Curva de Jordan: cerrada, simple, regular a trozos.

- **Teorema: [de Green]**

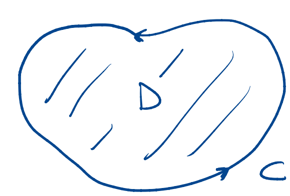
Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ curva de Jordan orientada positivamente,

$D \subset \mathbb{R}^2$ región acotada por C,

$F : D \to \mathbb{R}^2$ de clase $C^1(D)$, $F = (F_1, F_2)$.

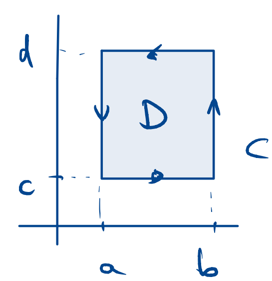
Entonces:

$$\boxed{\oint_C (F_1\,dx + F_2\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy}$$



Dem.: (Idea)

Caso 1: Si D es un rectángulo,



- $$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)\,dx \right) dy +$$

$$+ \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(F_2(b,y) - F_2(a,y) \right) dy +$$ (1)

$$+ \int_a^b \left(F_1(x,d) - F_1(x,c) \right) dx.$$

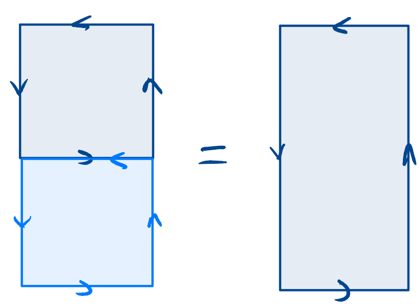
- $$\oint_C (F_1\,dx + F_2\,dy) = \oint_C (F_1, F_2)\cdot d\ell =$$

(2) $$= \int_a^b F_1(x,c)\,dx + \int_c^d F_2(b,y)\,dy - \int_a^b F_1(x,d)\,dx - \int_c^d F_2(a,y)\,dy$$

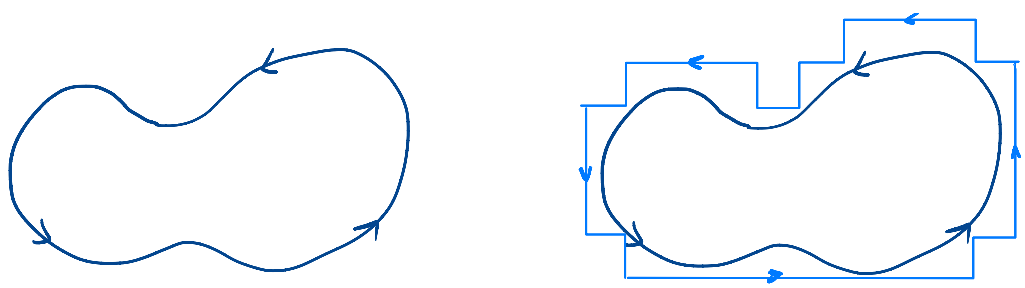
(1) = (2) //.

<u>Caso general</u>: Notamos que si sumamos las integrales de línea sobre dos rectángulos con un lado en común,

la contribución de ese lado se cancela.

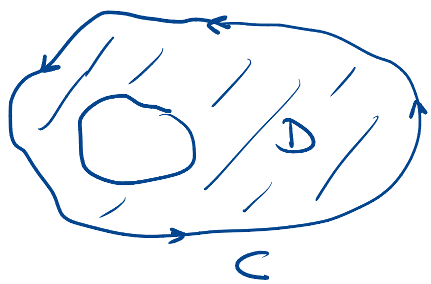


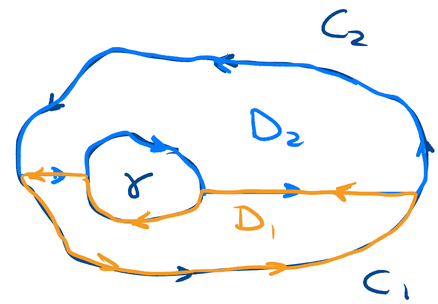
Así, podemos aproximar una región D por rectángulos,



//.

- <u>Nota</u>: Con esta misma idea, podemos generalizar el T$^{\text{ma}}$ de Green para regiones que no sean simplemente conexas:





Vemos en el dibujo que

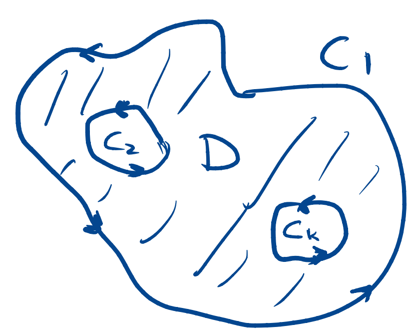
$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_{D_1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy + \iint_{D_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy =$$

$$= \int_{C_1} F\cdot d\ell + \int_{C_2} F\cdot d\ell = \int_C F\cdot d\ell - \int_\gamma F\cdot d\ell .$$

- **Teorema:** [de Green generalizado]

Sean $C_1,\dots,C_n$ curvas de Jordan orientadas positivamente, con $C_2,\dots,C_n$ contenidas en el interior de C_1 y no se intersecan dos a dos, y sea $F=(F_1,F_2)$ de clase C^1. Entonces:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_{C_1} F\cdot d\ell - \sum_{k=2}^{n}\int_{C_k} F\cdot d\ell .$$

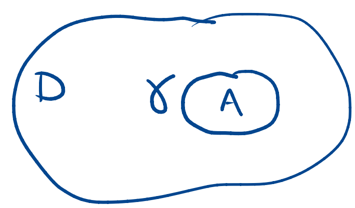


• **Nota:** Como corolario del T^ma de Green podemos probar el lema de Poincaré:

$$\left.\begin{array}{l} F \in C^1(D),\ D \subset \mathbb{R}^2 \text{ simplemente conexo} \\ F \text{ cerrado, i.e., } \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} F \text{ conservativo} \\ \text{en } D, \end{array}$$

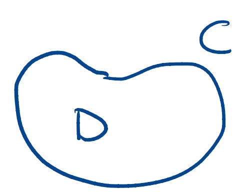
pues

$$\oint_\gamma F \cdot d\ell = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 \quad \forall \gamma \subset D \text{ curva simple cerrada} //.$$



• **Nota:** Además, permite calcular el área de una región plana como integral de línea:

$$\boxed{\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \int_C (-y, x) \cdot d\ell}$$



$\boxed{}$ $F(x,y) = (-y, x) \Rightarrow \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D dx\,dy = \text{Área}(D)$$

- Divergencia y rotacional | Flujo y circulación

Sea $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F\ C^1$.

Definimos los operadores divergencia y rotacional,

$$\mathrm{div}(F) \equiv \nabla \cdot F = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3,$$

$$\mathrm{curl}(F) \equiv \nabla \times F = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2,\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3,\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1).$$

- En $\mathbb{R}^2$, si $F = (F_1, F_2)$,

$$\nabla \cdot F = \partial_x F_1 + \partial_y F_2,$$

$$\nabla \times F = (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\vec{k} \quad (\vec{k} \text{ vector perpendicular al plano}).$$

→ Tª Green: Versión circulación

$$\boxed{\iint_D (\nabla \times F)\cdot \vec{k}\, dx\,dy = \underbrace{\int_C F \cdot d\ell}_{\text{circulación de } F \text{ sobre } C.}}$$

~ "2D Stokes theorem"

Interpretación: imaginemos F como el campo de velocidades $\vec{v}$ de un fluido. Sea C_r el círculo de radio r centrado en P, y $\vec{z}$ el vector tangente a C_r. La media de la velocidad angular, $\omega_r = \frac{1}{r}\vec{v}\cdot\vec{z}$, sobre C_r es

$$\overline{\omega}_r = \frac{1}{2\pi r}\int_{C_r} \omega_r \, d\ell = \frac{1}{2\pi r^2}\int_{C_r} \vec{v}\cdot d\vec{\ell},$$

C_r

y por T$^{\underline{a}}$ de Green,

$$\overline{\omega}_r = \frac{1}{2\pi r^2}\iint_{D_r} (\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{k}\, dx\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{“} \lim_{r\to 0} \overline{\omega}_r = \frac{1}{2}(\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{k} \text{”}$$

→ La circulación de $\vec{v}$ sobre C_r coincide con la integral de $\nabla\times\vec{v}$ en D_r, e indican la "intesidad de giro" o rotación del fluido.

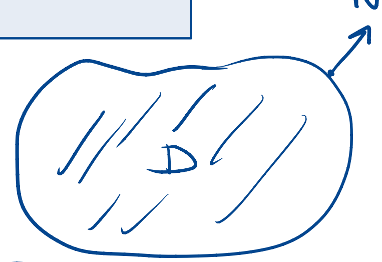
→ T$^{\underline{a}}$ Green: Versión Flujo

En las mismas condiciones, se cumple que:

$$\boxed{\underbrace{\int_C F\cdot\vec{N}\,d\ell}_{\text{Flujo de } F \text{ a través de } C} = \iint_D \nabla\cdot F\, dx\,dy}$$

~ "2D Gauss theorem"

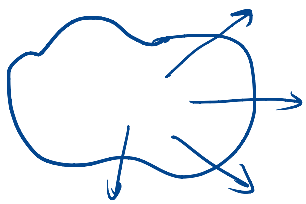
$\vec{N} = \vec{\tau}\times\vec{k}$



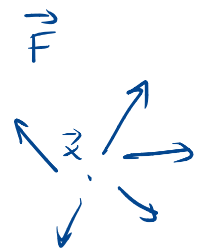
C

Interpretación:

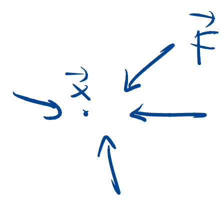
$$\underbrace{\frac{1}{\pi r^2}\int_{C_r} \vec{v}\cdot\vec{N}\, d\ell}_{\text{flujo por unidad de área}} = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{D_r} \nabla\cdot\vec{v}\, dx\, dy \xrightarrow{r\to 0} \nabla\cdot\vec{v}$$



Es decir, la divergencia en un punto mide el flujo que fluye por ese punto por unidad de área.



$\nabla\cdot\vec{F}(\vec{x})>0$



$\nabla\cdot\vec{F}(\vec{x})<0$.