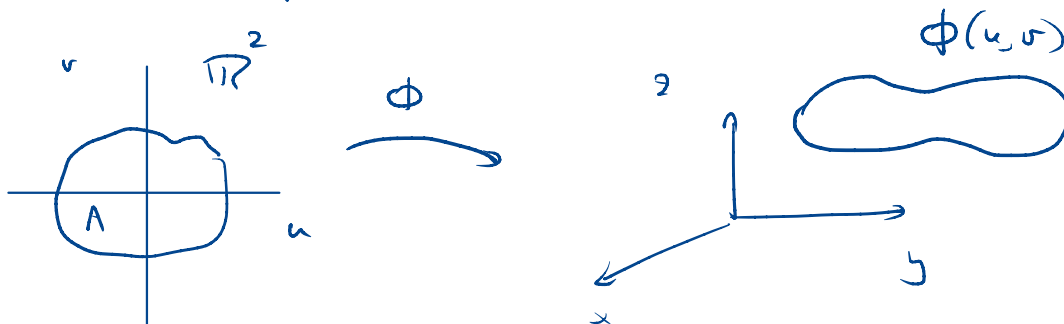


Clases 43, 44: Integrales de superficie.

Def: Superficie regular

Subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ dado como imagen de una función $\phi: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en A , inyectiva y tal que $\text{rango}(J\phi) = 2$.

$\rightarrow \phi$ se llama parametrización de S .



$$\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v)).$$

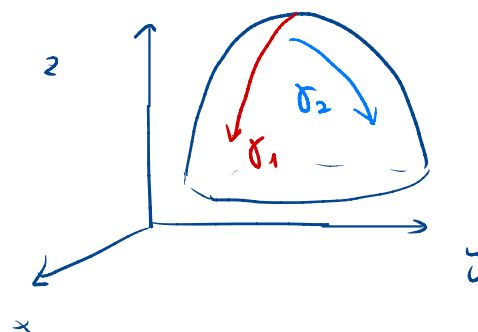
• Si se fija uno de los dos parámetros, se obtiene una curva en la superficie:

$$\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

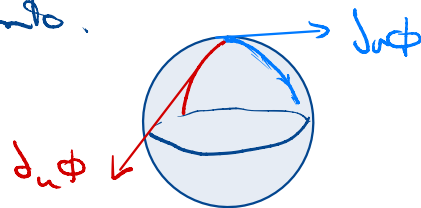
$$u \mapsto \gamma_1(u) = \phi(u, v_0)$$

$$\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v \mapsto \gamma_2(v) = \phi(u_0, v)$$



Por ello, $\frac{\partial \phi}{\partial u} = \gamma'_1(u)$ y $\frac{\partial \phi}{\partial v} = \gamma'_2(v)$ nos dan dos vectores tangentes a la superficie en un punto.

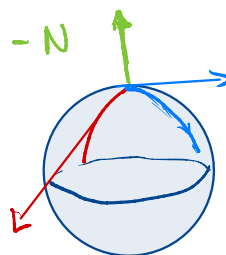


• Def: Vector normal

Dada superficie parametrizada $\phi(u, v)$, se define el vector normal como

$$N_\phi(u, v) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_u \phi_1 & \partial_u \phi_2 & \partial_u \phi_3 \\ \partial_v \phi_1 & \partial_v \phi_2 & \partial_v \phi_3 \end{vmatrix}$$

Nota: El orden de los parámetros cambia el sentido del vector normal.



($J\phi$ de rango 2)



Nota: Si ϕ es regular, entonces $\partial_u \phi$ y $\partial_v \phi$ son lin. independientes, luego $N(u, v) \neq (0, 0, 0)$.

• Ejemplos: Parametrizaciones

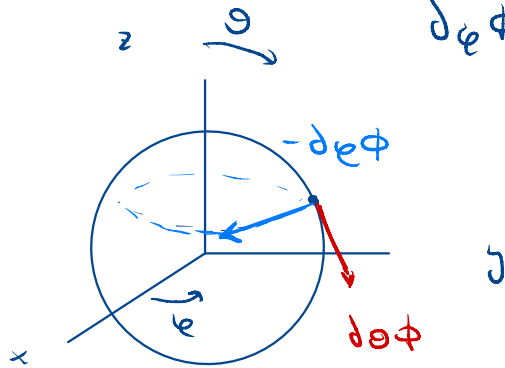
① Esfera: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$

$$\phi : [0, 2\pi) \times [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, \vartheta) \mapsto \phi(\varphi, \vartheta) = R(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$$

Vectores tangentes: $\partial_\theta \phi(r, \theta) = R(\cos \theta \cos \theta, \sin \theta \cos \theta, -r)$

$\partial_\phi \phi(r, \theta) = R(-\sin \theta \cos \theta, \cos \theta \sin \theta, 0)$



Vector normal: $N(r, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \times \frac{\partial \phi}{\partial \theta} =$

$$= R^2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 \\ \cos \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & -r \end{vmatrix} =$$

$$= R^2 (-\cos^2 \theta, -\sin^2 \theta, -r^2 \cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta) =$$

$$= R^2 \sin \theta (-\cos \theta, -\sin \theta, -r) = -R^2 \sin \theta \phi(r, \theta).$$

② Grafos (explícitos): $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$

Parametrización "trivial": $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$

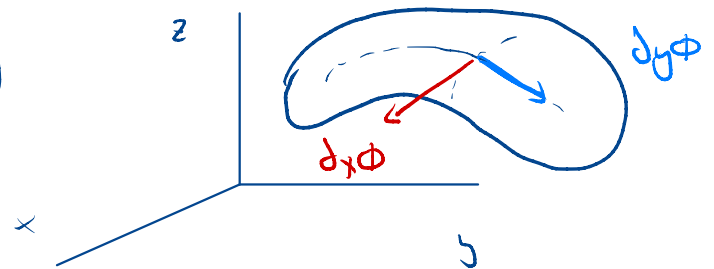
Vectores tangentes:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)), \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$$

Vector normal:

$$N(x,y) = d_x \Phi \times d_y \Phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & d_x f \\ 0 & 1 & d_y f \end{vmatrix} =$$

$$= (-d_x f(x,y), -d_y f(x,y), 1)$$



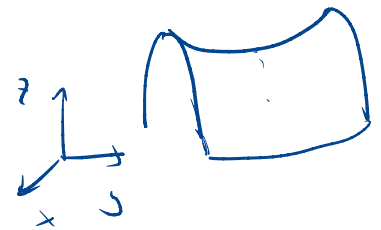
→ Ejemplo: Paraboloide hiperbólico:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\}$$

Escogemos $u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b} \rightarrow z = u^2 - v^2$.

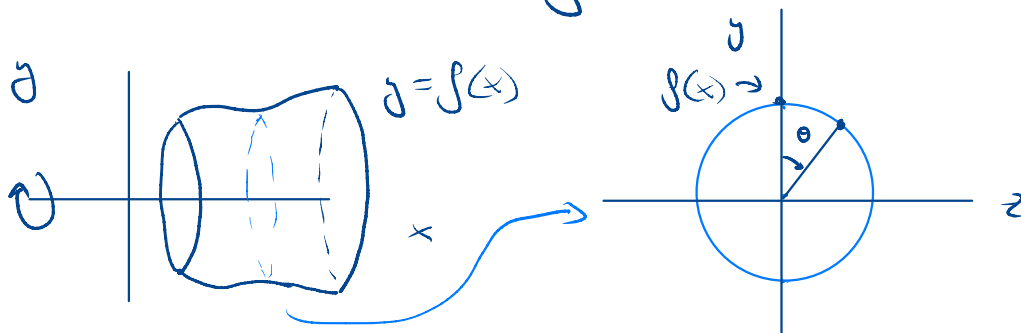
Así, $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u,v) \mapsto \phi(u,v) = (au, bv, u^2 - v^2)$$



③ Superficies de revolución

3.1) Generada por revolución de la curva $y = f(x)$,
con $x \in [a,b]$, alrededor de eje x :



Parametrización:

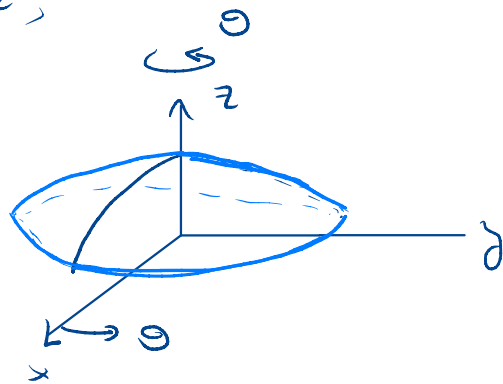
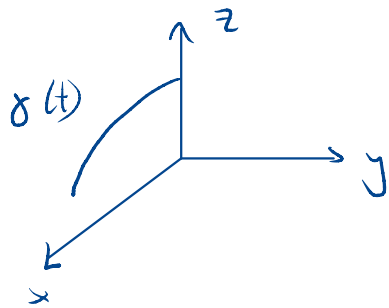
$$\phi(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta), \quad \begin{matrix} x \in [a, b] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

3.1) Análogamente, si consideramos la curva

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (x(t), 0, y(t)) \quad \left\{ \right.$$

y giramos en torno a eje z ,



$$\phi(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)), \quad \begin{matrix} t \in [a, b] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

④ Elipsoide:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

$$\phi(\ell, \theta) = (a \cos \ell \sin \theta, b \sin \ell \sin \theta, c \cos \ell), \quad \begin{matrix} \theta \in [0, \pi) \\ \ell \in [0, 2\pi) \end{matrix}$$

⑤ Cono elíptico: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\}$

Hacemos $x = a r \cos \theta$, $y = b r \sin \theta$, y así

$$z^2 = r^2 \rightarrow z = r.$$

Queda la parametrización

$$\phi(r, \theta) = (a r \cos \theta, b r \sin \theta, r), \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) \\ r \in \mathbb{R} \end{array}$$

⑥ Paraboloide (elíptico):

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\}$$

$$\phi(r, \theta) = (a r \cos \theta, b r \sin \theta, r^2), \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) \\ r \in \mathbb{R} \end{array}$$

• Def. 1 Parametrizaciones equivalentes

$\phi_1: A_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi_2: A_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son parametr. equiv. de una superficie S si

$$1) \phi_1(A_1) = \phi_2(A_2) = S,$$

$$2) \exists h: A_1 \rightarrow A_2 \text{ difeom. de clase } C^1 / \phi_1 = \phi_2 \circ h.$$

Se puede comprobar que

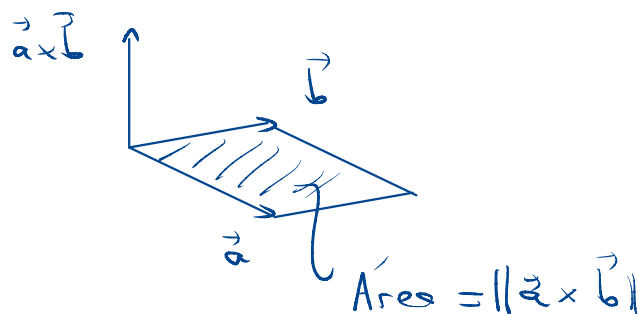
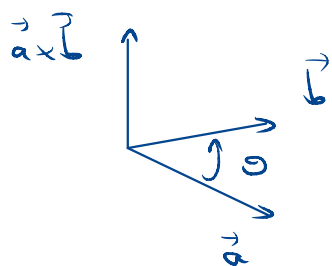
$$N_{\phi_1}(u, v) = \underbrace{\det(Jh(u, v))}_{\text{signo constante}} N_{\phi_2}(h(u, v)) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Si $\det(Jh) > 0$: ϕ_1, ϕ_2 tienen misma orientación,
Si $\det(Jh) < 0$: orientación contraria.

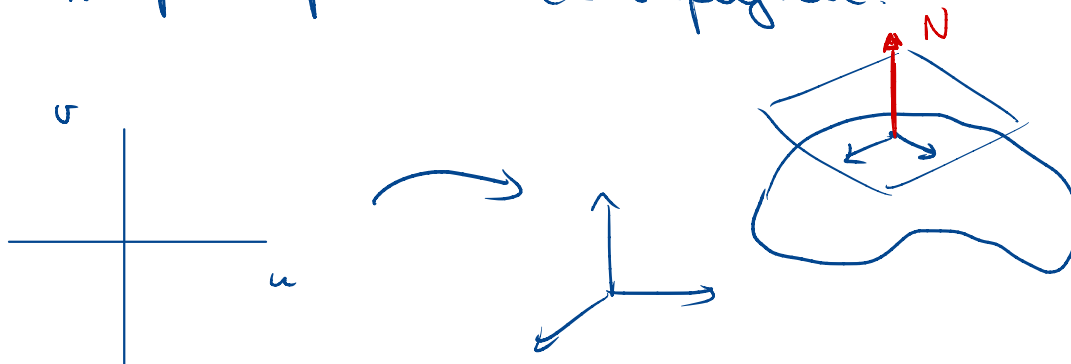
Área de una superficie

Recordemos que el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$$



Entonces, dada una superficie parametrizada $\phi(u, v)$, su vector normal nos mide el área de un pequeño "parche" en ese punto. Es decir, $du\phi, dv\phi$ nos indican como se deforma el plano $\mathbb{R}^2$ para producir la superficie:



- Def.: Dada $\phi : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización regular de S , se define

$$\text{Área}(S) = \iint_A \|N_\phi(u, v)\| du dv.$$

Nota: Es independiente de la parametrización. En efecto, si $\phi_1 = \phi_2 \circ h$,

haciendo el cambio $(s, t) = h(u, v)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Área}(S) &= \iint_{A_2} \|N_{\phi_2}(s, t)\| \, ds \, dt = \\ &= \iint_{A_1} \|N_{\phi_2}(h(u, v))\| |\det(Jh(u, v))| \, du \, dv = \iint_{A_1} \|N_{\phi_1}(u, v)\| \, du \, dv. \end{aligned}$$

• Casos particulares:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Gráfico: } \phi(x, y) &= (x, y, f(x, y)) \rightarrow \\ &\rightarrow N(x, y) = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|N(x, y)\| = \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2} \end{aligned}$$

2) Superficie de revolución:

Revolución de $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, alrededor de eje x :

$$\phi(x, \vartheta) = (x, f(x) \cos \vartheta, f(x) \sin \vartheta), \quad x \in [a, b], \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$N_\phi(x, \vartheta) = (-f(x)f'(x), f(x) \cos \vartheta, f(x) \sin \vartheta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Área} = \int_a^b \int_0^{2\pi} \|N_\phi(x, \vartheta)\| \, dx \, d\vartheta = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

• Ejercicio: 3 (Hoja 16) Calcular el área de:

a) Región que en el plano $x+y+z=1$ determina la superficie $x^2+y^2=1$.

Sol: Gráfico $z=1-x-y$.

Parametrización $X(u,v) = (u, v, 1-u-v) \rightarrow$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} \partial_u X(u,v) = (1, 0, -1) \\ \partial_v X(u,v) = (0, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow N_X(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ = (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Región $x^2+y^2 \leq 1 \rightarrow D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \iint_D \|N_X(u,v)\| \, du \, dv = \iint_D \sqrt{3} \, du \, dv = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{3} \, r \, dr \, d\theta = \pi \sqrt{3}. \end{aligned}$$

• Nota: Podemos comprobar que, si $F(x,y,z) = x+y+z-1$, $\nabla F(x,y,z) = (1,1,1)$ es paralelo al vector normal calculado con la parametrización que escogemos.

• Nota: Podríamos haber tomado directamente

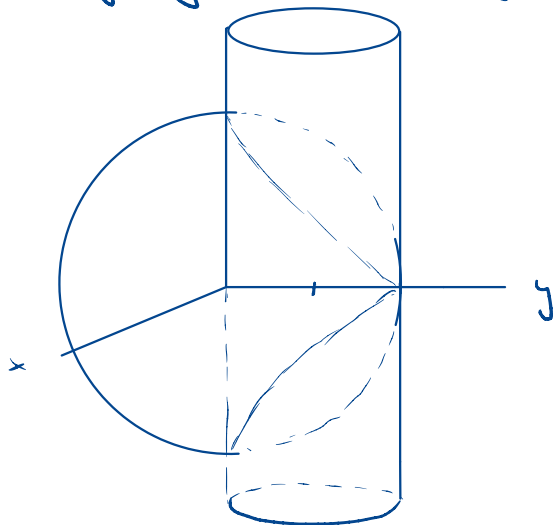
la parametrización

$$X(r, \theta) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, 1 - r \cos \theta - r \sin \theta),$$

calcular $\Delta_r X \times \Delta_\theta X$ e integrar $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \|\Delta_r X \times \Delta_\theta X\| dr d\theta$.

b) Porción de $x^2 + y^2 + z = 1$ interior a $x^2 + y^2 = y$.

$$x^2 + y^2 - y = 0 \rightarrow x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$



Región de parámetros $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}\}$.

Por simetría, consideramos la parte de la superficie con $z \geq 0$, dada por el grafo

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow X(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$$

con $(u, v) \in D$.

Calculamos $N_X(u, v)$:

$$\begin{aligned} \Delta_u X(u,v) &= \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right), \\ \Delta_v X(u,v) &= \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right), \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Delta_u X(u,v) &= \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right), \\ \Delta_v X(u,v) &= \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right), \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_X(u,v) = \Delta_u X(u,v) \times \Delta_v X(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|N_X(u,v)\|^2 = \frac{u^2 + v^2 + 1 - u^2 - v^2}{1 - u^2 - v^2} = \frac{1}{1 - u^2 - v^2}.$$

Por tanto,

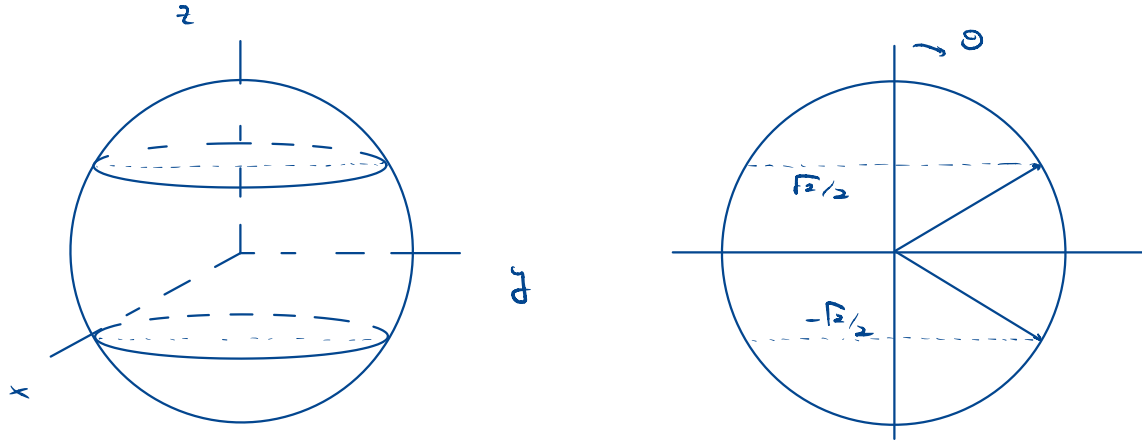
$$\text{Área} = 2 \iint_D \|N_X(u,v)\| du dv.$$

$$\text{Cambio a polares: } \begin{cases} u = r \cdot \cos \vartheta \\ v = \frac{1}{2} + r \cdot \sin \vartheta \end{cases} \begin{cases} r \in [0, \frac{1}{2}] \\ \vartheta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

$$\text{Área} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{r}{1 - r^2 \cos^2 \vartheta - \left(\frac{1}{2} + r \sin \vartheta\right)^2} dr d\vartheta = \dots \text{difícil.}$$

(*) $\rightarrow$ En p. 235-

c) Porción de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ entre $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Parametrización: superficie esférica,

$$X(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta),$$

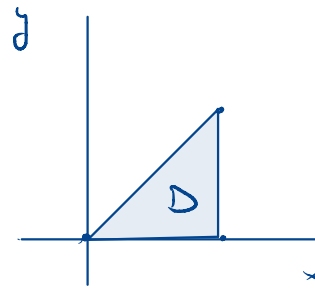
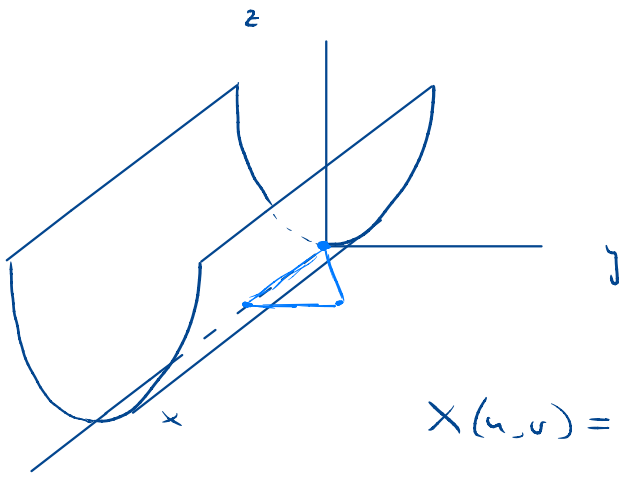
$$\text{con } (\varphi, \theta) \in D = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}.$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta \in [\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}), \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})] = [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}].$$

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \|d_\varphi X \times d_\theta X\| d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin \theta d\theta = 2\pi \left[-\cos \theta \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 2\sqrt{2} \pi.$$

d) Porción de $z = y^2$ sobre triángulo $(0,0), (1,0), (1,1)$.



$$X(u, v) = (u, v, v^2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} X(u, v) = (1, 0, 0) \\ \frac{\partial}{\partial v} X(u, v) = (0, 1, 2v) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_X(u, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (0, -2v, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|N_X(u, v)\| = \sqrt{1 + 4v^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Región: } D &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u\} = \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq 1, v \leq u \leq 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \iint_D \sqrt{1 + 4v^2} \, du \, dv = \int_0^1 \left(\int_0^u \sqrt{1 + 4v^2} \, dv \right) du = \dots \\ &= \int_0^1 \left(\int_v^1 \sqrt{1 + 4v^2} \, du \right) dv = \dots \end{aligned}$$

Faltaría calcular la primitiva $\int \sqrt{1 + 4x^2} \, dx \rightarrow$
 $\rightarrow$ Cambio $2x = \tan(\theta) \rightarrow$ racional trigonométrica $\rightarrow$ cambio
 $\rightarrow$ racional fracciones simples $\rightarrow$ deshacer cambios. ||

Cases 45, 46 :

(*) [3] b) Porción de $x^2 + y^2 + z = 1$ interior a $x^2 + y^2 = y$.

$$x^2 + y^2 - y = 0 \rightarrow x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

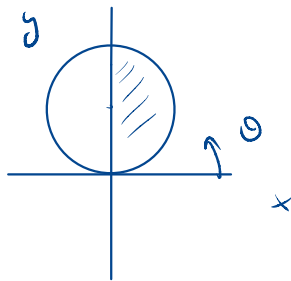
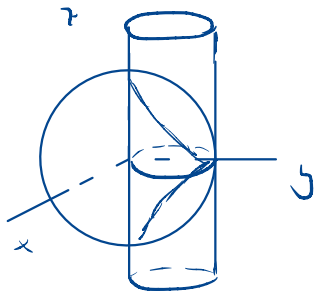
Habríamos llegado a

$$\text{Área} = 2 \iint_D \|N_x(u, v)\| du dv, \text{ con}$$

$$\|N_x(u, v)\| = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \quad y \quad D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq v\}.$$

$$\text{Cambio a polares: } \begin{cases} u = r \cdot \cos \theta \\ v = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Región en $r-\theta$? Por simetría, podemos tomar $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,



$$\text{Además, } r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \leq r \sin \theta \Rightarrow r \leq \sin \theta.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 4 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sin \theta} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \right) d\theta = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[-(1-r^2)^{1/2} \right]_0^{\sin \theta} d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} (-\sqrt{1-\sin^2 \theta} + 1) d\theta = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} -|\cos \theta| d\theta + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi - 4. \end{aligned}$$

• Opción 2: Esféricas.

Por simetría, podemos tomar $z \geq 0$, $x \geq 0$.

En esféricas: $X(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$

Región de parámetros:

$$D = \left\{ \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi] : \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \left(\sin \varphi \sin \theta - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}, \right. \\ \left. \cos \varphi \sin \theta \geq 0, \cos \theta \geq 0 \right\}$$

$$\bullet \cos \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\bullet \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta - \sin \varphi \sin \theta \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin^2 \theta \leq \sin \varphi \sin \theta \Rightarrow \sin \theta \leq \sin \varphi \Rightarrow \varphi \in [0, \pi]$$

$$\bullet \cos \varphi \sin \theta \geq 0 \Rightarrow \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $(\sin \theta \geq 0)$ $\varphi \in [0, \pi]$

Como $\varphi, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin \theta \leq \sin \varphi \Rightarrow \theta \leq \varphi$.

Por tanto, $D = \{(\varphi, \theta) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] : \theta \leq \varphi\}$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \text{Área}(S) &= 4 \iint_D \|N_x(\varphi, \theta)\| \, d\varphi \, d\theta = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\varphi} |\sin \theta| \, d\theta \right) d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\varphi} \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos \theta]_0^{\varphi} d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \varphi) d\varphi = \\ &= 4 \left(\frac{\pi}{2} - [\sin \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2\pi - 4. \end{aligned}$$

• Def: Integral de superficie (campo escalar)

Sea $f: S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continuo, S superficie simple regular.

Sea $\phi: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización $S = \phi(A)$.

Se define

$$\iint_S f \, dS = \iint_A f(\phi(u,v)) \|N_\phi(u,v)\| \, du \, dv.$$

Nota: El valor de $\iint_S f \, dS$ es independiente de la parametrización. Se prueba mediante cambio de variables:

$$\phi_1 = \phi_2 \circ h \quad (h \text{ diffeom. } C^1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{\phi_1}(u,v) = \underbrace{\det(Jh(u,v))}_{\text{signo constante}} N_{\phi_2}(h(u,v))$$

Cambio $(s,t) = h(u,v)$:

$$\iint_{A_1} f(\phi_1(u,v)) \|N_{\phi_1}(u,v)\| \, du \, dv =$$

$$= \iint_{A_1} f(\phi_2(h(u,v))) \|N_{\phi_2}(h(u,v))\| |\det(Jh(u,v))| \, du \, dv =$$

$$= \iint_{A_2} f(\phi_2(s,t)) \|N_{\phi_2}(s,t)\| \, ds \, dt //$$

• Ejercicio: 4

a) $f(x, y, z) = z^2$, $S \equiv$ casquete de $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ para $0 \leq z \leq 1$.

$$\text{Grafo: } X(u, v) = (u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^2))$$

$$\text{Región: } D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} duX &= (1, 0, u) \\ dvX &= (0, 1, v) \end{aligned} \Rightarrow N_X(u, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \end{vmatrix} = (-u, -v, 1)$$

Así,

$$\iint_S f dS = \iint_D f(u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^2)) \|N_X(u, v)\| du dv =$$

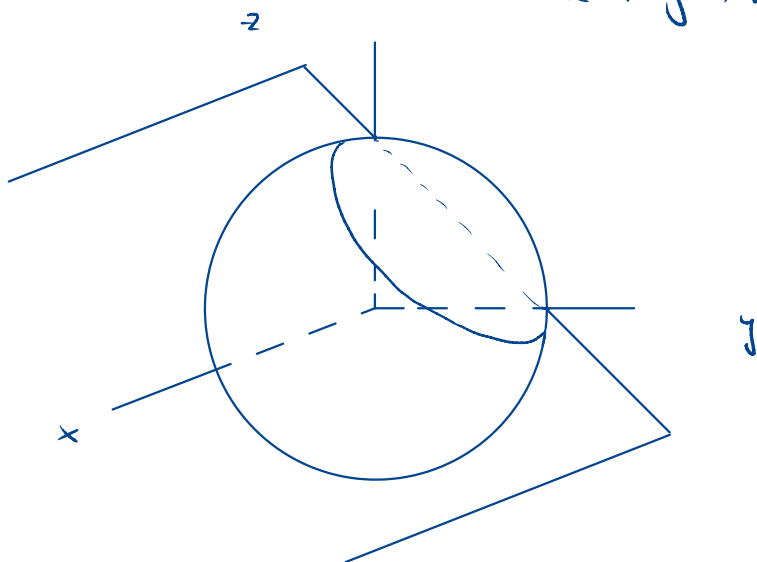
$$= \iint_D \frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2 \sqrt{1 + u^2 + v^2} du dv$$

Cambio a polares: $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta \rightarrow$

$$\iint_S f dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{4} r^4 \sqrt{1 + r^2} r dr d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r^5 \sqrt{1 + r^2} dr = \dots \quad (\text{por partes}) //$$

d) $f(x, y, z) = x^2 y z$, $S \equiv$ casquete más pequeño en que el plano $y+z=1$ divide a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



Superficie: graf $X(x, y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$.

Región: región en plano xy interior a la proyección de la circunferencia de corte,

$$\begin{cases} y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=1-y \\ x^2+y^2+(1-y)^2=1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 2y^2 - 2y = 0 \rightarrow x^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow \text{Elipse } \left(\frac{x}{1/\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y - \frac{1}{2}}{1/2}\right)^2 = 1.$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{1/\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y - \frac{1}{2}}{1/2}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

Así,

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \|N_x(x, y)\| \, dx \, dy.$$

$$\begin{aligned} \partial_x X(x, y) &= \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right), \\ \partial_y X(x, y) &= \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right), \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_x(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|N_x(x, y)\|^2 = \frac{1}{1-x^2-y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_S f \, dS = \iint_D x^2 y \sqrt{1-x^2-y^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \, dx \, dy.$$

Cambio a coord. elípticas:

$$\begin{aligned} x &= h_1(r, \varphi) = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos \varphi \\ y &= h_2(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{r}{2} \sin \varphi \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} r &\in [0, 1] \\ \varphi &\in [0, 2\pi] \end{aligned} \right\} \Rightarrow |Jh| = \begin{vmatrix} \frac{c\varphi}{\sqrt{2}} & -\frac{r \cdot s\varphi}{\sqrt{2}} \\ \frac{s\varphi}{2} & \frac{r \cdot c\varphi}{2} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \iint_S f \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^2}{2} \cos^2 \varphi \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2} \sin \varphi\right) \frac{r}{2\sqrt{2}} \, dr \, d\varphi =$$

$$= \int_0^1 \frac{r^3}{8\sqrt{2}} \pi \, dr = \frac{\pi}{32\sqrt{2}}.$$

- Def: Integral de superficie (campo vectorial).

Sea $f: S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo,

S superficie regular con $\phi: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización de $S = \phi(A)$.

Se define
$$\iint_S f \cdot dS = \iint_A f(\phi(u,v)) \cdot N_\phi(u,v) du dv$$

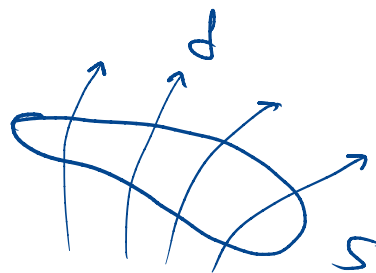
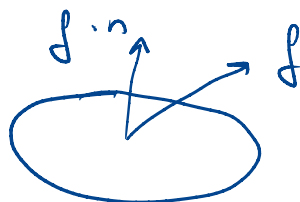
Nota: Puede verse como la integral de superficie del campo escalar $f \cdot n$ con $n \equiv$ vector normal unitario. En efecto,

$$f(\phi(u,v)) \cdot N_\phi(u,v) = f(\phi(u,v)) \cdot \underbrace{\frac{N_\phi(u,v)}{\|N_\phi(u,v)\|}}_{\equiv n} \|N_\phi(u,v)\|$$

Es decir,

$$\iint_S f \cdot dS \equiv \iint_S \underbrace{f \cdot n}_{\text{componente normal de } f} dS$$

| Flujo de f a través de S |



Nota: Al cambiar de parametrización, la integral de superficie de un campo vectorial puede cambiar de signo, pero su valor absoluto no cambia.

En efecto, $\phi_1 = \phi_2 \circ h \rightarrow$

$$\begin{aligned} \iint_{A_1} f(\phi_1(u,v)) \cdot N_{\phi_1}(u,v) du dv &= \\ &= \iint_{A_1} f(\phi_1(u,v)) \cdot N_{\phi_2}(h(u,v)) \det(Jh(u,v)) du dv = \\ &= \pm \iint_{A_2} f(s,t) \cdot N_{\phi_2}(s,t) ds dt \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $(s,t) = h(u,v)$

• Ejemplo: Calcular el flujo del campo

$f(x,y,z) = (xy, z, x+y)$ a través de la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

Sol:

Gráfico $z = 1-x-y \rightarrow X(u,v) = (u,v, 1-u-v)$

Región: $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0, 1-u-v \geq 0\} =$
 $= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1-u\}$

$$\begin{aligned} J_u X(u,v) &= (1, 0, -1) \\ J_v X(u,v) &= (0, 1, -1) \end{aligned} \Rightarrow N_X(u,v) = (1, 1, 1)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \iint_S f \cdot dS &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (ur, 1-u-r, u+r) \cdot (1, 1, 1) \right) dr du = \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1+ur) dr \right) du = \int_0^1 \left(1-u + u \frac{(1-u)^2}{2} \right) du = \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{24}.
\end{aligned}$$

• Ejercicio: 6 Integral de superficie de:

b) $F(x, y, z) = (\sin(xy), z(x-y), x^2 + y^2)$

$S \equiv$ porción del plano $y = 2z$ limitado por el hipерболоide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.



Superficies cuadráticas:

En forma implícita:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Tras completar cuadrados y trasladar si necesario, se reduce a

1) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$

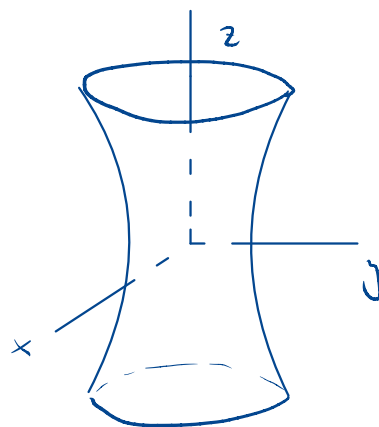
2) $Ax^2 + By^2 + Cz = 0$

Tipo D:

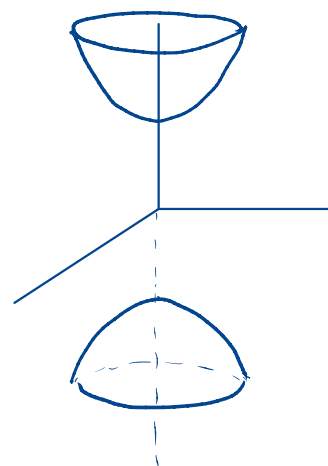
1.1) Elipsoside: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

1.2) Hiperboloides:

1.2.1) De una hoja: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



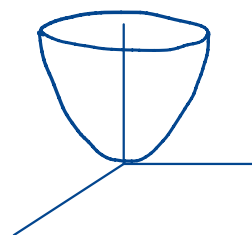
1.2.2) De dos hojas: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$



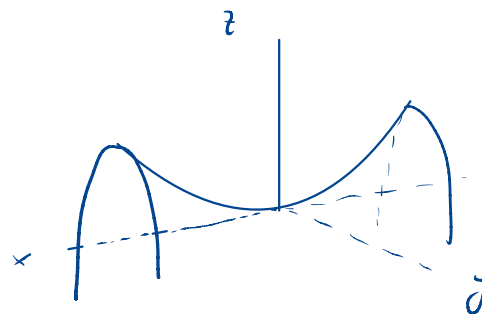
↳ Cortes con planos paralelos a los coordenados dan hipérbolas o elipses.

1.3) Paraboloides:

1.3.1) Eléptico: $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



1.3.2) Hiperbólico: $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$



1.4. Cono elíptico: $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

1.5) Cilindros:

- Elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Parabólico: $y + \lambda x^2 = 0$
- Hiperbólico: $y^2 - x^2 = 1$