

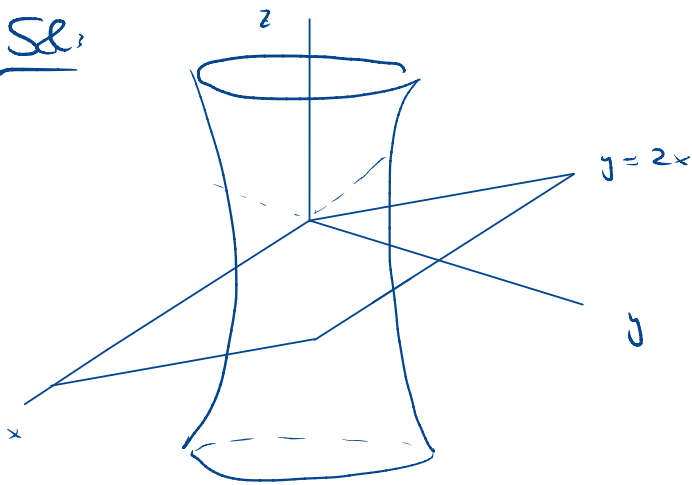
## Clase 47, 48: Teoremas de Stokes y Gauss

• Ejercicio: **6** Integral de superficie de:

b)  $F(x, y, z) = (\sin(xy), z(x-y), x^2 + y^2)$

$S \equiv$  porción del plano  $y = 2z$  limitado por el hiperboloide de una hoja  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

Sol:



Parametrización: graf  $z = \frac{y}{2} \rightarrow X(u, v) = (u, v, \frac{v}{2})$ .

Región: Interior de la curva proyección en  $z = 0$  de la intersección,

$$z = \frac{y}{2} \quad \left( \begin{array}{l} \rightarrow z = \frac{y}{2} \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \end{array} \right. \rightarrow x^2 + y^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$$

Es decir,  $D = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + \frac{3}{4}v^2 \leq 1 \}$

Calculamos vector normal:

$$\begin{aligned} J_u X(u, v) &= (1, 0, 0) \\ J_v X(u, v) &= (0, 1, \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} N_X(u, v) &= (0, -\frac{1}{2}, 1) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } \iint_S f \cdot dS &= \iint_D F(u, v, \frac{v}{2}) \cdot (0, -\frac{1}{2}, 1) du dv = \\ &= \iint_D \left( -\frac{1}{2} \frac{v}{2} (u-v) + u^2 + v^2 \right) du dv, \end{aligned}$$

$$\text{Cambio a elípticas: } \begin{cases} u = r \cos \vartheta \\ v = \frac{2}{\sqrt{3}} r \sin \vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} r \in [0, 1] \\ \vartheta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_S f \cdot dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( -\frac{1}{4} \frac{2}{\sqrt{3}} r \sin \vartheta (r \cos \vartheta - r \sin \vartheta) + \right. \\ &\quad \left. + r^2 \cos^2 \vartheta + \frac{4}{3} r^2 \sin^2 \vartheta \right) \frac{2}{\sqrt{3}} r dr d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( -\frac{1}{2\sqrt{3}} r^3 \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{1}{2\sqrt{3}} r^3 \sin^2 \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + r^3 \cos^2 \vartheta + \frac{4}{3} r^3 \sin^2 \vartheta \right) \frac{2}{\sqrt{3}} dr d\vartheta = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{4} \pi + \frac{4}{3} \frac{1}{4} \pi \right) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{6} + \frac{2}{4\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

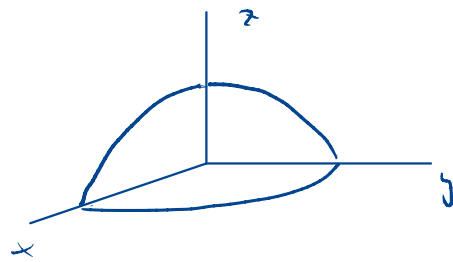
c)  $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ ,  $S \equiv$  primer octante de

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1.$$

Sol.

Surface:  $X(\varphi, \theta) = (\frac{1}{2} \cos \varphi \sin \theta, \frac{1}{3} \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$

$$\text{con } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \varphi \sin \theta \geq 0 \\ y = \frac{1}{3} \sin \varphi \sin \theta \geq 0 \\ z = \cos \theta \geq 0 \end{cases}$$



Esto es,  $D = \{(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] : \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

$$\begin{aligned} d_\varphi X &= (-\frac{1}{2} \sin \varphi \sin \theta, \frac{1}{3} \cos \varphi \sin \theta, 0) \\ d_\theta X &= (\frac{1}{2} \cos \varphi \cos \theta, \frac{1}{3} \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_x = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{2} \sin \varphi \sin \theta & \frac{1}{3} \cos \varphi \sin \theta & 0 \\ \frac{1}{2} \cos \varphi \cos \theta & \frac{1}{3} \sin \varphi \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} \cos \varphi \sin^2 \theta, -\frac{1}{2} \sin \varphi \sin^2 \theta, \frac{1}{2} \frac{1}{3} \sin \theta \cos \theta\right) =$$

$$= \sin \theta \left(-\frac{1}{3} \cos \varphi \sin \theta, -\frac{1}{2} \sin \varphi \sin \theta, \frac{1}{6} \cos \theta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_S f \cdot dS = \iint_D f(X(\varphi, \theta)) \cdot N_x(\varphi, \theta) d\varphi d\theta =$$

$$= \iint_D \left(\frac{1}{2} \cos \varphi \sin \theta \cos \theta, \frac{1}{3} \sin \varphi \sin \theta \cos \theta, \cos^2 \theta\right) \cdot N_x(\varphi, \theta) d\varphi d\theta =$$

$$= \iint_D \sin \theta \left(-\frac{1}{6} \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \cos \theta - \frac{1}{6} \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \cos \theta - \frac{1}{6} \cos^2 \theta \cos \theta\right) d\varphi d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D s\vartheta \left( \frac{-1}{6} s^2 \vartheta c\vartheta - \frac{1}{6} c^2 \vartheta c\vartheta \right) d\varrho d\vartheta = \\
&= \iint_D \frac{-1}{6} s\vartheta c\vartheta d\varrho d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{-1}{6} s\vartheta c\vartheta d\vartheta d\varrho = \frac{-\pi}{12} \int_0^{\pi/2} \frac{s c(2\vartheta)}{2} d\vartheta = \\
&= \frac{-\pi}{24}.
\end{aligned}$$

### • Teoremas de Stokes y Gauss (3D)

En  $\mathbb{R}^2$ , vimos que el T<sup>a</sup> de Green admitía dos formulaciones distintas en términos de circulación-rotacional y flujo-divergencia. Si  $C \subset \mathbb{R}^2$  curva de Jordan orientada positivamente,  $D \subset \mathbb{R}^2$  región acotada por  $C$ ,  $F = (F_1, F_2) \in C^1$ ,

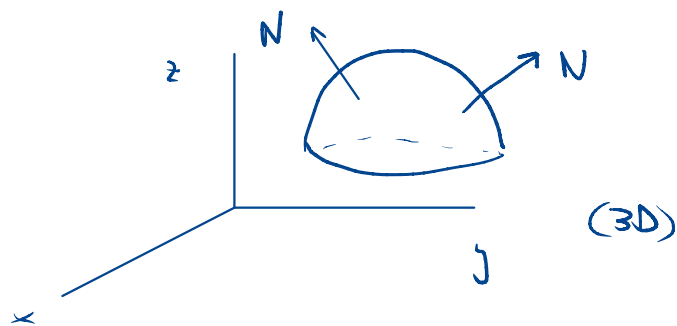
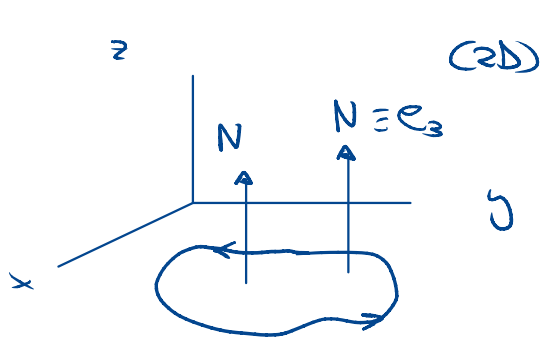
$$\iint_D (\nabla \times F) \cdot \vec{k} \, dx \, dy = \int_C F \cdot d\vec{\ell} \quad \text{Teorema Stokes (2D)}$$

$$\iint_D \nabla \cdot F \, dx \, dy = \int_C F \cdot \vec{N} \, d\ell \quad \text{Teorema Gauss (2D)}$$

Extendemos ahora estos teoremas a 3D, en el sentido de que la región  $D$  no necesita ser plana, sino una superficie cualquiera.

Green's th: 1828  
Gauss: 1839  
Stokes: 1854.





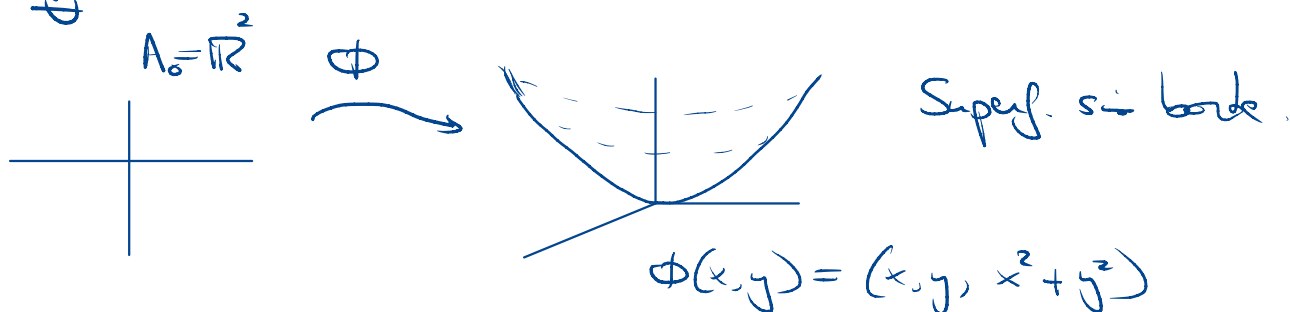
• Def: Superficie regular con borde

Sea  $S_0 \subset \mathbb{R}^3$  superficie regular simple sin borde con parametrización  $\Phi: A_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

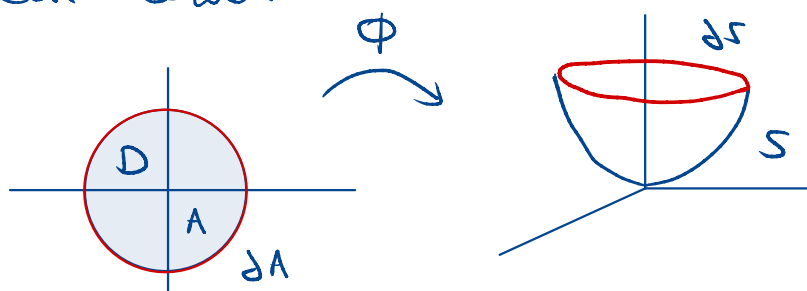
Sea  $A \subset A_0$  abierto (proyectable) con frontera  $\partial A \subset A_0$ .

La imagen de  $D = A \cup \partial A$  por  $\Phi$ ,  $S = \Phi(D)$ , se llama superficie regular simple con borde, y su borde es  $\partial S = \Phi(\partial A)$ .

Ej:



Un "parche" en este ejemplo genera superficie con borde:



El borde  $\partial S$  es una curva regular a trozos que delimita la superficie  $\Phi(A)$ .

- Definimos la orientación de la curva  $\partial S$  en función de la de la curva plana  $\partial A$ :

Dada una parametrización de  $\partial A$ , su composición con  $\Phi$  (parametrización de la superficie) da una parametrización de  $\partial S$ . Se dice entonces que  $\partial S$  tiene la orientación inducida por  $\partial A$ .

$$\text{Ej: } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\begin{array}{l} \text{Parametrización de } \partial A: \gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \text{(orientación positiva)} \quad t \mapsto (\cos t, \sin t) \end{array} \left\{ \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Parametrización de } S: \phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto \phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) \end{array} \left\{ \right.$$

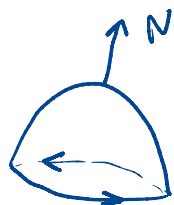
Parametrización de  $\partial S$  inducida por  $\partial A$ :

$$\tilde{\gamma}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} t &\mapsto \tilde{\gamma}(t) = (\phi \circ \gamma)(t) = \phi(\gamma(t)) = \\ &= (\cos t, \sin t, 1). \end{aligned}$$

- Nota: Si  $\partial A$  está parametrizada positivamente, la orientación inducida de la curva  $\partial S = \phi(\partial A)$  es tal que al recorrer  $\partial S$ , el vector normal  $N_\phi$  queda a la izquierda.  
Dicha orientación se llama orientación positiva de  $\partial S$  respecto de  $S$ .

$\mathbb{R}^3$



Orientaciones positivas de  $\partial S$  respecto de  $S$ .

### • Teorema: [de Stokes]

Sea  $F: B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^1$ ,  $B$  abierto.

Sea  $S \subset B$  superficie regular simple con borde  $\partial S \subset B$  orientado positivamente. Entonces,

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS = \oint_{\partial S} F \cdot d\ell$$

circulación de  $F$  en  $\partial S$ .

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (\frac{\partial}{\partial y} F_3 - \frac{\partial}{\partial z} F_2, \frac{\partial}{\partial z} F_1 - \frac{\partial}{\partial x} F_3, \frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1).$$

Nota: El  $T^2$  de Green es un caso particular: basta tomar  $S \subset \mathbb{R}^2$  región plana y  $F(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$ .

Nota: Recordamos que

conservativo  $\Rightarrow$  irrotacional

irrotacional  
+ dominio simplemente  
conexo  $\left\{ \Rightarrow \text{conservativo (lema de Poincaré)} \right.$

• Ejemplo: Calcular  $\int_{\partial S} F(x, y, z) \cdot d\mathbf{l}$ , siendo

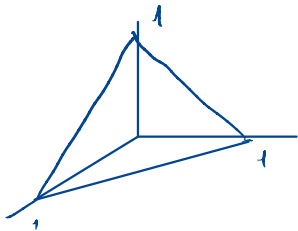
$$F(x, y, z) = \left(-\frac{3}{2}y^2, -2xy, yz\right),$$

$\partial S$  el borde de la superficie  $S$ ,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\},$$

usando el  $T^2$  de Stokes y directamente con la definición de integral de líneas.

Sol:



Parametrización de  $S$ :

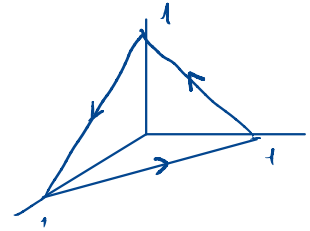
$$X(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$$

región:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$$

Vector normal:  $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_u X(u,v) = (1, 0, -1) \\ \partial_v X(u,v) = (0, 1, -1) \end{vmatrix} \Rightarrow N_X(u,v) = (1, 1, 1)$

① Usando Stokes:



$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{3}{2}y^2 & -2xy & yz \end{vmatrix} = (z, 0, -2y + 3y) = (z, 0, y)$$

luego  $(\nabla \times F)(X(u,v)) = (1-u-v, 0, v)$ . Así,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times F) \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \iint_D (\nabla \times F(X(u,v))) \cdot N_X(u,v) du dv = \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-u} (1-u-v, 0, v) \cdot (1, 1, 1) dv \right) du = \int_0^1 \int_0^{1-u} (1-u) dv du = \\ &= \int_0^1 (1-u)^2 du = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

② Como integral de línea:  $\partial S$  tiene tres trozos regulares, los segmentos orientados de  $(1, 0, 0)$  a  $(0, 1, 0)$ , de  $(0, 1, 0)$  a  $(0, 0, 1)$ , y de  $(0, 0, 1)$  a  $(1, 0, 0)$ :

$$C_1 \equiv \gamma_1(t) = t(0, 1, 0) + (1-t)(1, 0, 0) = (1-t, t, 0), \quad t \in [0, 1],$$

$$C_2 \equiv \gamma_2(t) = (0, 1-t, t), \quad t \in [0, 1],$$

$$C_3 \equiv \gamma_3(t) = (t, 0, 1-t), \quad t \in [0, 1].$$

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} F \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} F \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} F \cdot d\mathbf{r},$$

$$F(\gamma_1(t)) = \left(-\frac{3}{2}t^2, -2t(1-t), 0\right),$$

$$F(\gamma_2(t)) = \left(-\frac{3}{2}(1-t)^2, 0, t(1-t)\right),$$

$$F(\gamma_3(t)) = (0, 0, 0).$$

Per  $t=0$ ,

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}t^2, -2t(1-t), 0\right) \cdot (-1, 1, 0) dt + \\ &\quad + \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}(1-t)^2, 0, t(1-t)\right) \cdot (0, -1, 1) dt + 0 = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t(1-t) + t(1-t)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \checkmark.$$

- Nota: Si  $S_1, S_2$  son dos superficies con el mismo borde  $\partial S_1 = \partial S_2 = C$  y misma orientación, entonces

$$\iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot dS = \iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot dS,$$

pues por T<sup>a</sup> Stokes ambas coinciden con  $\oint_C F \cdot d\ell$ .

- Ejemplo: Sea  $F(x, y, z) = (xe^z, x + xz, 3e^z)$ ,  
 $S$  la semiesfera superior de  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Calcular  $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS$  con vector normal hacia afuera.

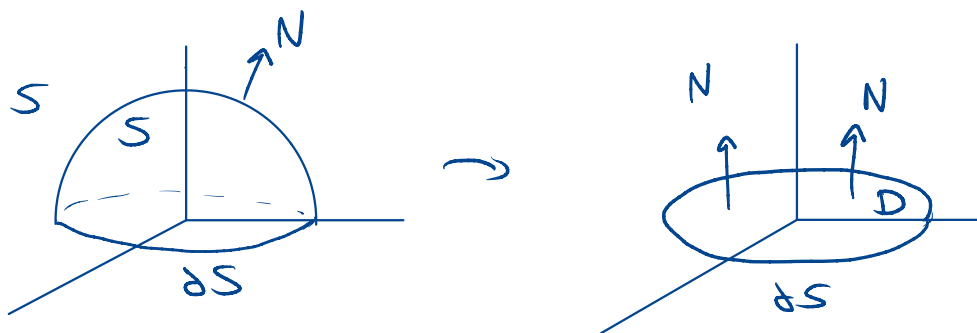
Sol:

$$\nabla \times F(x, y, z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xe^z & x + xz & 3e^z \end{vmatrix} = (-x, xe^z, 1+z)$$

En vez de parametrizar  $S$ , usamos que

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS = \iint_D (\nabla \times F) \cdot dS, \text{ donde}$$

$D$  es el círculo plano  $x^2 + y^2 = 1$ ,



Así,  $X(u, v) = (u, v, 0) \rightarrow N_X(u, v) = (0, 0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times F) \cdot dS &= \iint_D (\nabla \times F) \cdot dS = \iint_D (-u, u \cdot 1, 1) \cdot (0, 0, 1) du dv = \\ &= \iint_D du dv = \pi // \end{aligned}$$

- Extendemos ahora el  $T^2$  de Gauss a 3D.

Recordamos la versión flujo del  $T^2$  de Green (Gauss 2D):

$$\iint_D \nabla \cdot F \, dx \, dy = \int_C F \cdot \vec{N} \, dl \quad (D \subset \mathbb{R}^2)$$

- Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  un compacto encerrado por su borde  $\partial M$  que es una superficie regular sin borde. Consideramos  $\partial M$  con normal exterior ( $\equiv$  orientación positiva).



• Teorema: [de Gauss o de la divergencia]

Sea  $F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^1$ ,  $A$  abierto.

Sea  $M \subset A$  compacto conexo, con  $\partial M$  superficie orientada positivamente (normal exterior a  $M$ ). Entonces,

$$\iiint_M \nabla \cdot F \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial M} F \cdot dS$$

Flujo a través de  $S$

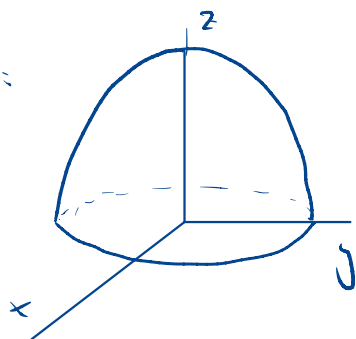
• Ejemplo:  $F(x, y, z) = (2x + y, 2y^2, z)$ ,

$V \equiv$  región de  $\mathbb{R}^3$  limitada por  $z = 2 - x^2 - y^2$  y el plano  $z = 0$ .

Comprobar  $\nabla \cdot F$  divergencia.

• Integral triple:  $\nabla \cdot F = 2 + 4y + 1 = 3 + 4y$

Región  $V$ :



$$V = \{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq z \leq 2, 0 \leq r \leq \sqrt{2-z} \}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_V \nabla \cdot F \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left( \int_0^{\sqrt{2-z}} (3 + 4rs \sin \theta) r \, dr \right) dz \, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[ \frac{3}{2} r^2 + \frac{4}{3} r^3 \sin \theta \right]_0^{\sqrt{2-z}} dz \, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left( \frac{3}{2} (2-z) + \frac{4}{3} (2-z)^{3/2} \sin \theta \right) dz \, d\theta = \\
&= 3\pi (4-2) = 6\pi.
\end{aligned}$$

• Flujo:  $S = S_1 \cup S_2$ , con

$$S_1 \equiv X_1(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2),$$

$$S_2 \equiv X_2(u, v) = (u, v, 0),$$

$$\text{ambas en } D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 2\}$$

$$N_{X_1}(u, v) = (2u, 2v, 1),$$

$$N_{X_2}(u, v) = (0, 0, 1).$$

Así,

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{S_1} F \cdot dS - \iint_{S_2} F \cdot dS =$$

$$= \iint_D (2u + v, 2v^2, 2 - u^2 - v^2) \cdot (2u, 2v, 1) \, du \, dv +$$

$$- \iint_D (2u+v, 2v^2, 0) \cdot (0, 0, 1) \, du \, dv =$$

$$= \iint_D (4u^2 + 2uv + 4v^3 + 2 - u^2 - v^2) \, du \, dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (3r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \cos \theta \sin \theta + 4r^3 \sin^3 \theta + 2 - r^2 \sin^2 \theta) r \, dr \, d\theta =$$

$$= 3 \cdot \frac{4}{4} \pi + 2\pi \cdot 2 - \frac{4}{4} \pi = 6\pi$$