

Clases 49, 50 = Ejercicios

• Repaso:

$$f \text{ escalar: } \iint_S f dS = \iint_A f(x(u,v)) \|N_x(u,v)\| du dv$$

$$f \text{ vectorial: } \iint_S f \cdot dS = \iint_A f(x(u,v)) \cdot N_x(u,v) du dv = \\ = \iint_S f \cdot \underbrace{n}_{\text{normal unitario}} dS$$

$$\underline{T^2 \text{ Stokes:}} \quad \iint_S (\nabla \times F) \cdot dS = \oint_{\partial S} F \cdot dl \quad \left(dS \text{ orientado} \right. \\ \left. \text{positiv. respecto} \right. \\ \left. \text{de } S \right)$$

$$\underline{T^2 \text{ Gauss:}} \quad \iiint_M \nabla \cdot F dx dy dz = \iint_{\partial M} F \cdot dS \quad \left(M \text{ compacto conexo,} \right. \\ \left. \partial M \text{ con normal} \right. \\ \left. \text{exterior a } M \right)$$

• Aplicación 1: Si S_1, S_2 superficies con mismo borde $C = \partial S_1 = \partial S_2$ y misma orientación, entonces:

$$\iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot dS = \iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot dS.$$

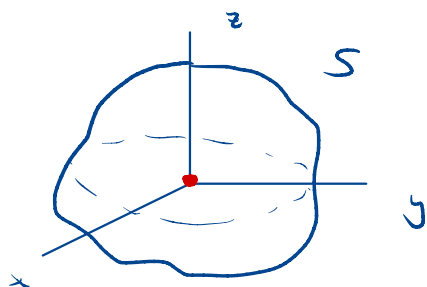


• Ejercicio: Sea $F(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2} e_r(\varphi, \theta)$, donde

e_r es el vector radial unitario.

Sea S una superficie simple cerrada (sin borde) que rodea al origen. Calcular el flujo de F sobre S .

Sol:



No conocemos la ecuación exacta de S , luego no podemos calcular $\iint_S F \cdot dS$ directamente.

Intentamos aplicar el T² de la divergencia.

$\nabla \cdot F$?

$$F(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

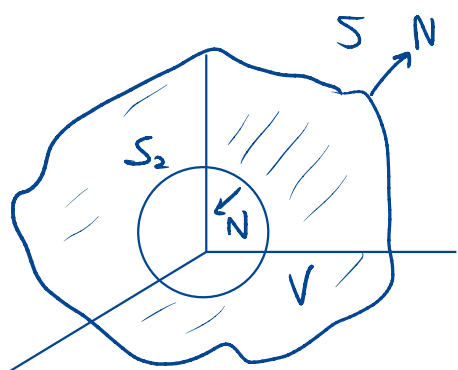
$$\partial_x F_1 = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla_x F_1 + \nabla_y F_2 + \nabla_z F_3 = \frac{(y^2+z^2-2x^2) + (x^2+z^2-2y^2) + (x^2+y^2-2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} =$$

$$= 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\},$$

Entonces, consideramos otra superficie que rodee al origen y sea interior a S :



Por T^a de Gauss,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} =$$

$$= \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz = 0,$$

con S_1, S_2 orientadas posit. (i.e., normal hacia afuera).

Por tanto,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2} \frac{-1}{R^2} dS = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi,$$

$$\text{luego} \quad \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi \quad \checkmark$$

Nota: Hemos visto que si M es una región compacta y conexa con $\partial M = S_1 \cup S_2$, entonces

$$\iiint_M \nabla \cdot F \, dx \, dy \, dz = \iint_{S_1} F \cdot dS + \iint_{S_2} F \cdot dS$$

(cada una con normal hacia afuera de M).

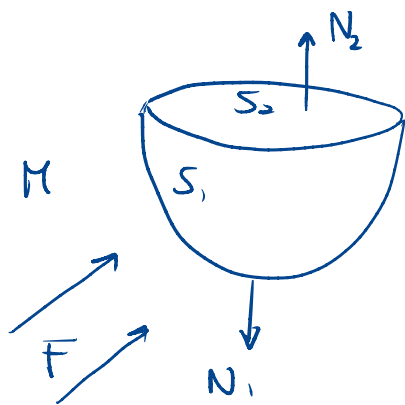
En particular,

Aplicación 2: Sean S_1, S_2 dos superficies que forman la frontera de M , y sea $F / \nabla \cdot F = 0$ en M . Entonces,

$$\iint_{S_1} F \cdot dS = - \iint_{S_2} F \cdot dS$$

(cada una con normal hacia afuera de M).

Ej: Si $\nabla \cdot F = 0$ en M :

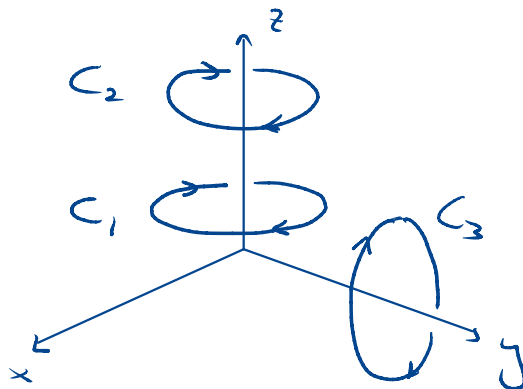


← El flujo de F que entra por S_1 es igual al que sale por S_2

- Ejercicio: Sea $F \in C^1(U)$, $\nabla \times F = 0$ en U , con
 $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0)\}$.

Sabiendo que

$$\oint_{C_1} F \cdot dl = 3,$$



calcular

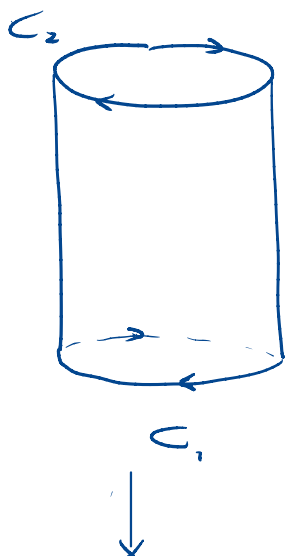
$$1) \oint_{C_2} F \cdot dl, \quad 2) \oint_{C_3} F \cdot dl$$

Sol: Para 2), basta tomar cualquier superficie con borde C_3 que no pase por el eje z . Así, por T^a Stokes,

$$\oint_{C_3} F \cdot dl = \iint_{S_3} (\nabla \times F) \cdot dS = 0$$

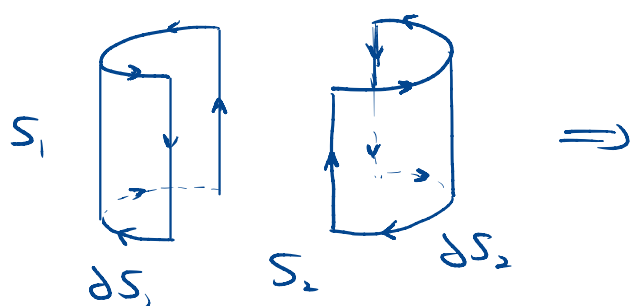
Veamos 1). No conocemos F , por lo que no podemos calcular la circulación en C_2 directamente. Necesitamos relacionarla con la de C_1 .

Consideremos el trozo de cilindro con bordes dados por C_1 y C_2 .



$S \equiv$ superficie lateral

→ Para aplicar T^a Stokes,
necesitamos una superficie con
un borde: cortamos el cilindro
como sigue



$$\int_{\partial S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{e} + \int_{\partial S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{e} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{e} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{e},$$

y por T^a Stokes,

$$\int_{\partial S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{e} + \int_{\partial S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{e} = \iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{e} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{e} = 3 //$$

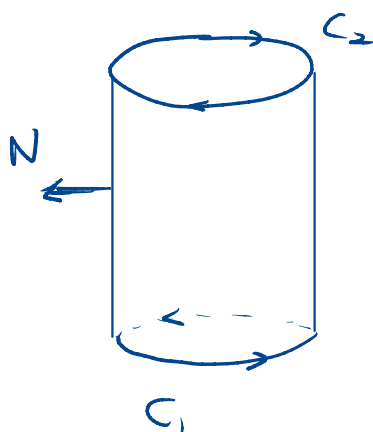
- Aplicación 3: Sea S superficie regular con frontera consistente de curvas simples, cerradas C_i , $i=1, \dots, n$, parametrizadas positivamente respecto de S . Entonces:

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} F \cdot d\mathbf{r}$$

Nota: Si $j=2$ y F irrotacional en un entorno de S ,

$$\oint_{C_1} F \cdot d\mathbf{r} = - \oint_{C_2} F \cdot d\mathbf{r}, \text{ con } C_1, C_2 \text{ orientadas posit. respecto de } S.$$

Caso típico:



$$\oint_{C_1} F \cdot d\mathbf{r} = - \oint_{C_2} F \cdot d\mathbf{r}$$

[Observed sign y dibujo.
Compared con p. -265-]

Repaso Bloque II: Ejercicios.

- 1) Integrales dobles y triples

$\swarrow$ Fubini
 $\searrow$ Cambio variable
 $\searrow$ áreas/vol.
- 2) Integrales de línea

$\swarrow$ Cálculo longitudes, trabajo
 $\searrow$ Campos conservativos, potencial.
 $\searrow$ T^a de Green
- 3) Integrales de superficie

$\swarrow$ Cálculo
 $\searrow$ T^a Stokes, Gauss.

• Ejercicio: [1^a Gnr. 2024]

Sea S el trozo de la superficie dada por $z = 3 - 2x^2$ que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Sea C la curva intersección, y

$$F(x, y, z) = (-yz, xz, xy).$$

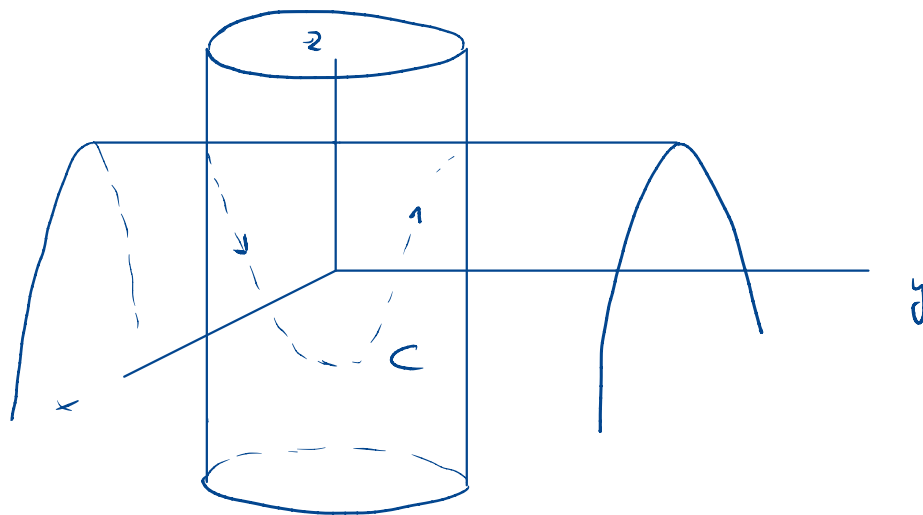
Calcular la circulación de F sobre C en sentido positivo respecto de S , cuando S se considera con vector normal con componente z positivo.

1) Como integral de líneas.

2) Como integral de superficie.

Sol:

$z = 3 - 2x^2 \rightarrow$ Cilindro parabólico (eje Y)



1) Curva intersección:
$$\left. \begin{aligned} z &= 3 - 2x^2 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Pasamos de las ecuaciones implícitas a una parametrización:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \sin(t) \\ z(t) &= 3 - 2(x(t))^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 3 - 2\cos^2(t)),$$

con $t \in [0, 2\pi)$.

$$T = \oint_C F \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin(t)(3-2\cos^2(t)), \cos(t)(3-2\cos^2(t)), \cos(t)\sin(t) \right) \cdot \\
&\quad \cdot (-\sin(t), \cos(t), 4\cos(t)\sin(t)) dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t)(3-2\cos^2(t)) + \cos^2(t)(3-2\cos^2(t)) + 4\cos^2(t)\sin^2(t) \right) dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(3-2\cos^2(t) + \sin^2(2t) \right) dt = 2\pi \left(3-2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 5\pi.
\end{aligned}$$

2) $\overset{a}{T}$ Stokes: $T = \oint_C F \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times F) \cdot d\mathbf{S}$

$$\begin{aligned}
\nabla \times F &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^2 & xz & xy \end{vmatrix} = (x-x, -y-y, z+z) = \\
&= (0, -2y, 2z)
\end{aligned}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 3-2x^2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(u, v) = (u, v, 3-2u^2),$$

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Normal: } \partial_u X(u, v) &= (1, 0, -4u) \\
\partial_v X(u, v) &= (0, 1, 0)
\end{aligned} \quad \left(\Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow N_x(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (4u, 0, 1)$$

Así,

$$T = \iint_D (0, -2v, 2(3-2u^2)) \cdot (4u, 0, 1) \, du \, dv =$$

$$= \iint_D 2(3-2u^2) \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2(3-2r^2 \cos^2 \theta) r \, dr \, d\theta =$$

$$= 6 \cdot 2\pi \int_0^1 r \, dr - 4 \cdot \pi \int_0^1 r^3 \, dr = 6\pi - \pi = 5\pi //$$

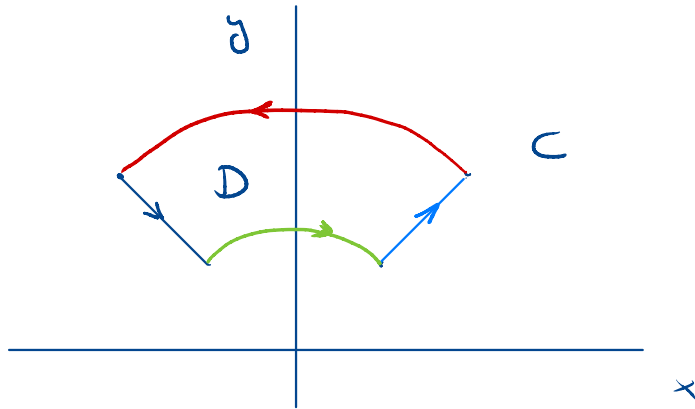
• Ejercicio: [2° Cuatrimestral 2024]

Calcular $\oint_C (x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy$, donde

C es la unión de:

- 1) Segmento de $(1,1)$ a $(2,2)$,
- 2) Arco de circunferencia centrada en $(0,0)$ que va del $(2,2)$ al $(-2,2)$,
- 3) Segmento del $(-2,2)$ al $(-1,1)$,
- 4) Arco de circunf. centrada en $(0,0)$ del $(-1,1)$ al $(1,1)$.

Sol: Representamos la curva plana C :



Podemos parametrizar cada trozo y calcular la integral de líneas.

Sin embargo, si denotamos $F(x, y) = (x^3 - y^3, x^3 + y^3)$, notamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 \\ \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) &= -3y^2 \end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3(x^2 + y^2) \right.$$

por lo que resulta más cómodo aplicar el T^2 de Green:

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy,$$

con $D \subset \mathbb{R}^2$ la región encerrada por C .

En palabras, $D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{8}, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\}$,

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{e} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}} 3r^2 r dr d\theta = 3 \frac{\pi}{2} \frac{1}{4} (8^2 - 2^2) = \frac{45}{2} \pi.$$

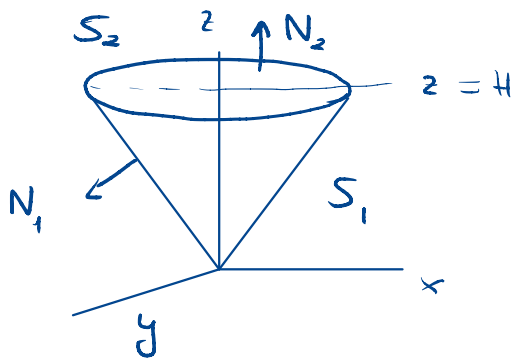
• Ejercicio: [2° Cuatrimestral 2024]

Considerar la región acotada por $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$, $z = H$.
Calcular el flujo a través de la frontera, hacia afuera, de $F(x, y, z) = (xz, yz, 1 + 2z^2)$.

- 1) Por definición de flujo como integral de superficie.
- 2) Usando T^* de la divergencia.

Sol:

- 1) Tenemos $z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow$ Cono (eje z),



$S_1 \equiv$ superficie lateral del cono

$S_2 \equiv$ "tapa" horizontal.

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq H\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq H^2, z = H\}.$$

$$S = S_1 \cup S_2.$$

Parametrización:

• De S_1 :

$$X_1(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}),$$

$$D_1 = \{(u, v) \in \mathbb{D}^2 : u^2 + v^2 \leq H^2\}$$

$$\left. \begin{aligned} J_u X_1(u, v) &= (1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}) \\ J_v X_1(u, v) &= (0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_{X_1}(u, v) = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right)$$

Nota: Hemos tomado parametrización con N_{X_1} hacia adentro.

• De S_2 : $X_2(u, v) = (u, v, H)$, $D_2 = \{(u, v) \in \mathbb{D}^2 : u^2 + v^2 \leq H^2\}$

$$\Phi = \iint_S F \cdot dS = \iint_{D_2} F(X_2(u, v)) \cdot N_{X_2}(u, v) du dv +$$

$$- \iint_{D_1} F(X_1(u, v)) \cdot N_{X_1}(u, v) du dv =$$

$$= \iint_{D_2} (uH, vH, 1 + 2H^2) \cdot (0, 0, 1) du dv +$$

$$- \iint_D (u\sqrt{u^2 + v^2}, v\sqrt{u^2 + v^2}, 1 + 2(u^2 + v^2)) \cdot \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right) du dv =$$

$$= (1 + 2H^2) \iint_{D_2} du dv +$$

$$\begin{aligned}
& - \iint_D (-u^2 - v^2 + 1 + 2(u^2 + v^2)) du dv = \\
& = (1 + 2H^2) \pi H^2 + \iint_D (-1 - u^2 - v^2) du dv = \\
& = \pi H^2 + 2\pi H^4 + 2\pi \int_0^H (-1 - r^2) r dr = \\
& = \cancel{\pi H^2} + 2\pi H^4 - \cancel{\pi H^2} - \frac{\pi}{2} H^4 = \frac{3\pi}{2} H^4.
\end{aligned}$$

$$2) \quad \Phi = \iiint_V \nabla \cdot F \, dx \, dy \, dz$$

$$\nabla \cdot F(x, y, z) = z + z + 4z = 6z,$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq H\}.$$

Asi,

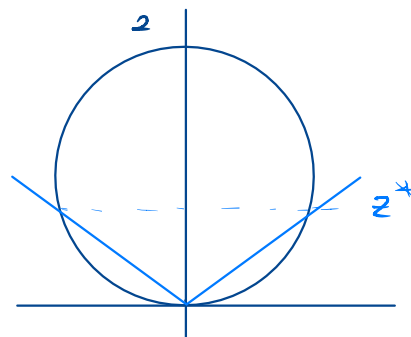
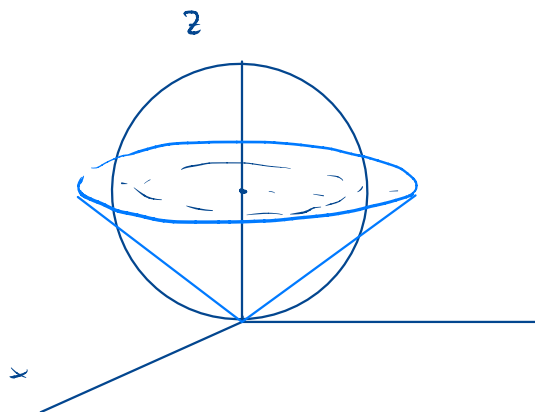
$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^H \left(\int_r^H 6z r \, dz \right) dr \, d\theta = \\
&= 2\pi \int_0^H 3r (H^2 - r^2) dr = 6\pi \left(\frac{1}{2} H^4 - \frac{1}{4} H^4 \right) = \\
&= \frac{3\pi}{2} H^4.
\end{aligned}$$

• Ejercicio: [Hoja 14, 15 a)]

Calcular $\iiint_A x^2 dx dy dz$,

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1, 4z^2 \geq 3(x^2 + y^2)\}$$

Sol:



$$\text{Cilindros: } \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1 \rightarrow r^2 + (z-1)^2 \leq 1 \\ 4z^2 \geq 3r^2 \rightarrow z^2 \geq \frac{3}{4}r^2 \end{cases}$$

$$\text{Intersección: } \begin{cases} r^2 + (z-1)^2 = 1 \\ z^2 = \frac{3}{4}r^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 + (z-1)^2 = 1 \\ z^2 = \frac{3}{4}(1 - (z-1)^2) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}(z^2 + 1 - 2z) \end{cases} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4}z^2 = \frac{3}{2}z \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z^* = \frac{6}{7} \rightarrow r^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{6}{7} = \frac{12}{7\sqrt{3}} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \bullet \iiint_A x^2 dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{6/3} \left(\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}^2} (r^2 \cos^2 \vartheta) r dr \right) d\vartheta \right) d\varphi + \\
 &+ \int_0^{2\pi} \left(\int_{6/3}^2 \left(\int_0^{\sqrt{1-(\vartheta-1)^2}} (r^2 \cos^2 \vartheta) r dr \right) d\vartheta \right) d\varphi = \dots
 \end{aligned}$$

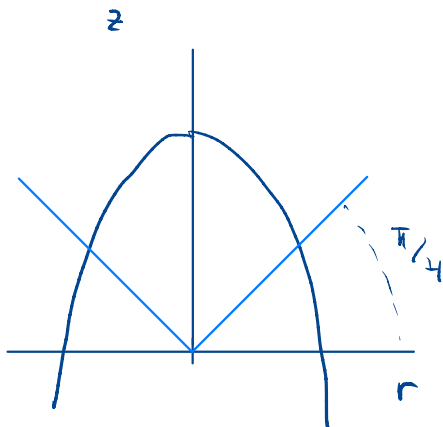
• Ejercicio: [Hoja 14, 18 a)]

Expresar el volumen de M usando coordenadas esféricas,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 \leq 2-z \leq 2\}$$

Sol:

$$\begin{aligned}
 &x^2 + y^2 \leq z^2 \\
 &x^2 + y^2 \leq 2-z \\
 &2-z \leq 2
 \end{aligned}
 \left\{ \rightarrow \begin{aligned} &x^2 + y^2 \leq z^2 \\ &z \leq 2 - x^2 - y^2 \\ &z \geq 0 \end{aligned} \right\} \begin{cases} - \text{cono} \\ - \text{paraboloide} \end{cases}$$



Esféricas:

$$\begin{aligned}
 &r^2 \sin^2 \vartheta \leq r^2 \cos^2 \vartheta \\
 &r \cos \vartheta \leq 2 - r^2 \sin^2 \vartheta \\
 &r \cos \vartheta \geq 0
 \end{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} - \text{cono} \\ - \text{paraboloide} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 &\sin \vartheta \leq |\cos \vartheta| \\
 \Rightarrow &r^2 \sin^2 \vartheta + r \cos \vartheta - 2 \leq 0 \\
 &\cos \vartheta \geq 0
 \end{aligned}$$

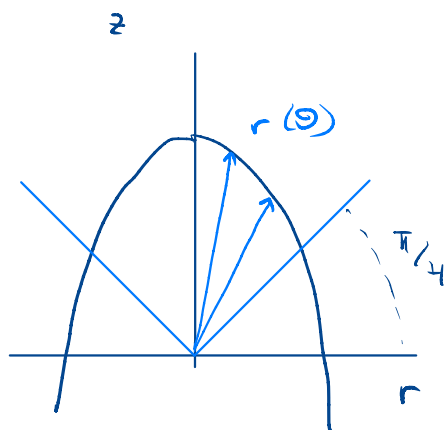
$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$
 $\uparrow$
 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

Así, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$r^2 \sin^2 \theta + r \cos \theta - 2 \leq 0$$



$$\downarrow$$

$$0 \leq r \leq r(\theta), \text{ con}$$

$r(\theta)$ solución de $r^2 \sin^2 \theta + r \cos \theta - 2 = 0$,

$$r(\theta) = \frac{-\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + 8 \sin^2 \theta}}{2 \sin^2 \theta}$$

Por lo tanto, $z = \frac{\pi}{4} r(\theta)$

$$V(\pi) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{r(\theta)} r^2 \sin^2 \theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

• Ejercicio: [Hoja 16, 30]

$$H \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$P \equiv z = 4 - x^2 - y^2, \text{ con } z \geq 0.$$

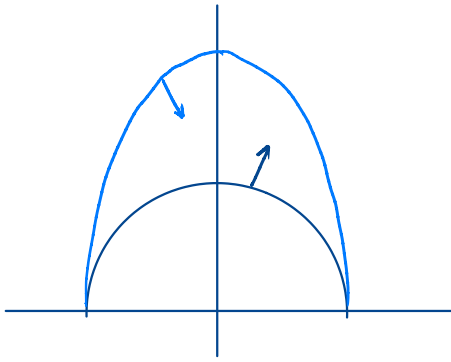
Sea $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Explicar por qué

$$\iint_H (\nabla \times F) \cdot dS + \iint_P (\nabla \times F) \cdot dS = 0,$$

con H orientada de modo que $n(0,0,2) = (0,0,1)$,

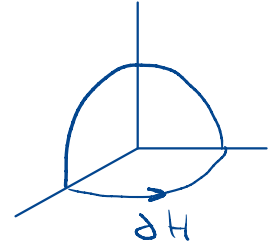
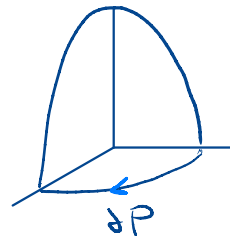
y P " " " " " $n(0,0,4) = (0,0,-1)$.

Sol:



observamos que el borde de H y P es la curva C dada por $x^2 + y^2 = 4$

Así, por T^{te} Stokes,



$$\iint_H (\nabla \times F) \cdot dS + \iint_P (\nabla \times F) \cdot dS =$$

$$= \oint_{\partial H} F \cdot d\ell + \oint_{\partial P} F \cdot d\ell = \oint_{\partial H} F \cdot d\ell - \int_{\partial H} F \cdot d\ell = 0,$$

donde ∂H , ∂P corresponden a la curva C con las orientaciones positivas respecto de las elegidas para H y P , que son contrarias.

• Ejercicio: [Hoja 16, 17]

Sea el sólido

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 3z^2, 0 \leq z \leq \sqrt{3}, x, y \geq 0\}$$

a) Escribe el volumen de M como integrales iterados

en las formas

$$a.1) V(\Pi) = \iint_{A_1} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz + \iint_{A_2} dx dy \int_{z_3(x,y)}^{z_4(x,y)} dz,$$

$$a.2) V(\Pi) = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} dy + \int_{z_3}^{z_4} dz \int_{x_3(z)}^{x_4(z)} dx \int_{y_3(x,z)}^{y_4(x,z)} dy.$$

b) Calcula $V(\Pi)$.

c) Comprueba b) usando T^u Gauss con $h(x,y,z) = (x,y,z)$.

d) Calcula el flujo de $f(x,y,z) = (x^2, y^2, -2(x+y)z)$ a través de

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, 1 \leq z \leq \sqrt{3}, x, y \geq 0\}$$

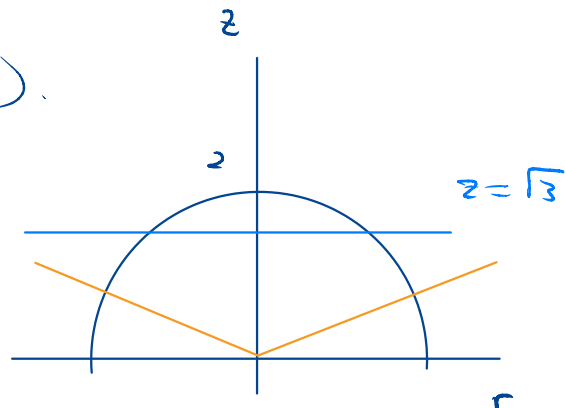
orientada al exterior de Π , usando el T^u de Stokes, buscando previamente un campo $g = (A, 0, C)$ cuyo rotacional sea f .

• Sol: Simetría axial (eje z).

Representación gráfica:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \rightarrow \text{esfera}$$

$$x^2 + y^2 = 3z^2 \rightarrow \text{Corno}$$



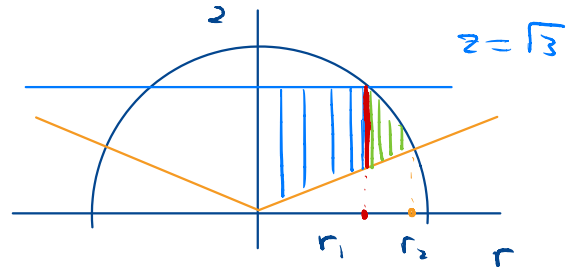
a)

$$a.1) V(\Pi) = \iint_{A_1} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz + \iint_{A_2} dx dy \int_{z_3(x,y)}^{z_4(x,y)} dz,$$

• Corte $z = \sqrt{3}$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r_1 = 1$$



• Corte $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 3z^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow (x^2 + y^2) \frac{4}{3} = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = \sqrt{3}$$

Así,

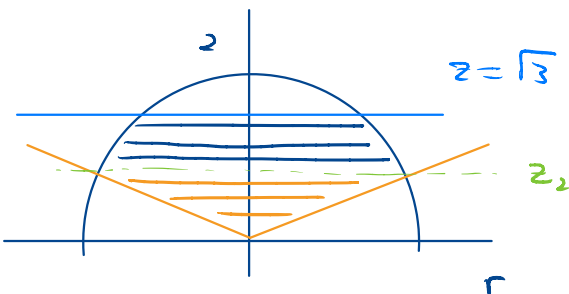
$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, x, y \geq 0\},$$

$$y \quad z_1(x,y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \quad z_2(x,y) = \sqrt{3},$$

$$z_3(x,y) = z_1(x,y), \quad z_4(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

$$a.2) V(\Pi) = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} dy + \int_{z_3}^{z_4} dz \int_{x_3(z)}^{x_4(z)} dx \int_{y_3(x,z)}^{y_4(x,z)} dy$$



- Calculando el corte, $z_2 = 1$.

Así,

$$z_1 = 0, z_2 = 1, x_1(z) = 0, x_2(z) = \sqrt{3}z,$$

$$y_1(x, z) = 0, y_2(x, z) = \sqrt{3z^2 - x^2},$$

y

$$z_3 = z_2 = 1, z_4 = \sqrt{3}, x_3(z) = 0, x_4(z) = \sqrt{4 - z^2},$$

$$y_3(x, z) = 0, y_4(x, z) = \sqrt{4 - x^2 - z^2}.$$

b) Calculamos $V(M)$ con a.1) en cilindricas,

$$V(M) = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_{r/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} r \, dz \, dr \, d\theta + \int_0^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{3}} \int_{r/\sqrt{3}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r \left(\sqrt{3} - \frac{r}{\sqrt{3}} \right) dr + \frac{\pi}{2} \int_1^{\sqrt{3}} r \left(\sqrt{4-r^2} - \frac{r}{\sqrt{3}} \right) dr =$$

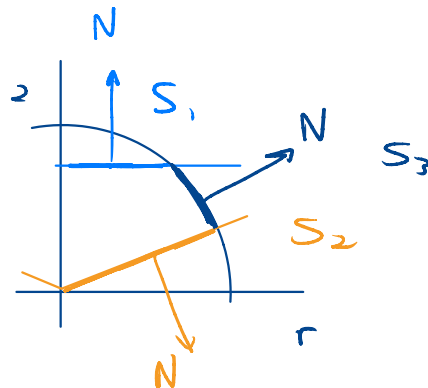
$$= \dots = \frac{3\sqrt{3}}{4} \pi - \frac{2}{3} \pi.$$

$$c) \iiint_M \nabla \cdot h \, dx \, dy \, dz = \iiint_M 3 \, dx \, dy \, dz = 3 V(M),$$

y usando T^* de Gauss,

$$\iiint_M \nabla \cdot h \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial M} h \cdot dS, \text{ con } \partial M \text{ con normal exterior.}$$

Vemos que ∂M es la
unión de cinco superficies,
 $\partial M = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_5$,



siendo S_1 el plano $z = \sqrt{3}$,

S_2 el cono, S_3 la esfera, y S_4, S_5 los planos coordenados.
Por todo,

$$\iint_{\partial M} h \cdot dS = \iint_{S_1} + \cancel{\iint_{S_2}} + \iint_{S_3} + \cancel{\iint_{S_4}} + \cancel{\iint_{S_5}},$$

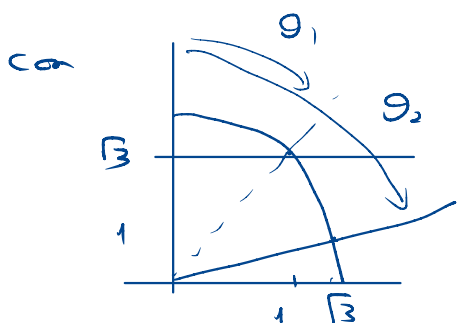
siendo el flujo a través de S_2, S_4, S_5 nulo pues
 h es radial.

$$\iint_{S_1} h \cdot dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (x, y, \sqrt{3}) \cdot (0, 0, 1) r dr d\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \frac{1}{2},$$

$$\iint_{S_3} h \cdot dS = \int_0^{\pi/2} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} 2e_r \cdot 4e_r \sin \theta d\theta \right) d\varphi =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) =$$

$$= 2\pi (\sqrt{3} - 1)$$



$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\theta_1 = \frac{\pi}{6}, \theta_2 = \frac{\pi}{3} \right)$$

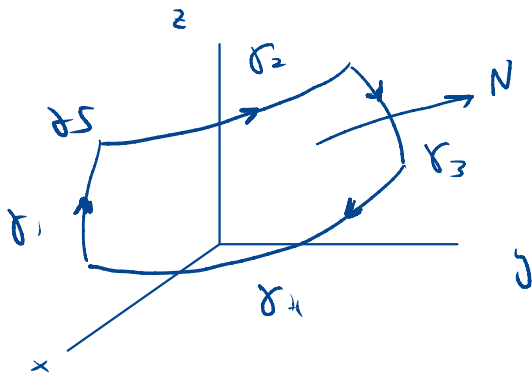
$$\Rightarrow V(M) = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \pi + 2\pi\sqrt{3} - 2\pi \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \pi - \frac{2}{3} \pi.$$

$$d) f(x, y, z) = (x^2, y^2, -2(x+y)z)$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, 1 \leq z \leq \sqrt{3}, x, y \geq 0\}$$

$$S: f = \nabla \times g, \text{ por } T^{\text{te}} \text{ Stokes,}$$

$$\iint_S f \cdot dS = \iint_S (\nabla \times g) \cdot dS = \oint_{\partial S} g \cdot d\ell, \text{ con } dS \text{ orientada positivamente respecto de } S.$$



$$d g = (g_1, 0, g_2) / f = \nabla \times g ?$$

$$\nabla \times g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g_1 & 0 & g_2 \end{vmatrix} = (\partial_y g_2, \partial_z g_1, -\partial_x g_2, -\partial_y g_1)$$

$$\begin{cases} \partial_y g_2 = x^2 \\ \partial_z g_1 - \partial_x g_2 = y^2 \\ \partial_y g_1 = 2(x+y)z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Por ejemplo, } g_2 = yx^2, \\ g_1 = y^2z + 2xy^2z. \end{cases}$$

Así,

$$\iint_S f \cdot dS = \oint_{\gamma_1} g \cdot d\ell + \dots + \oint_{\gamma_4} g \cdot d\ell, \text{ donde}$$

$$\gamma_1(t) = 2(\cos(t), 0, \sin(t)), \quad t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}],$$

$$\gamma_2(t) = (\cos(t), \sin(t), \sqrt{3}), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

$$\gamma_3^-(t) = 2(0, \cos(t), \sin(t)), \quad t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}],$$

$$\gamma_4^-(t) = (\sqrt{3}\cos(t), \sqrt{3}\sin(t), 1), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S f \cdot dS &= \cancel{\oint_{\gamma_1} g \cdot d\ell} + \oint_{\gamma_2} g \cdot d\ell - \oint_{\gamma_3^-} g \cdot d\ell - \oint_{\gamma_4^-} g \cdot d\ell = \\ &= \int_0^{\pi/2} (g_1(\gamma_2(t)), 0, g_2(\gamma_2(t))) \cdot \gamma_2'(t) dt + \\ &- \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} (2\cos^2(t)\sin(t), 0, 0) \cdot \cancel{\gamma_3'^-(t)} dt + \\ &- \int_0^{\pi/2} (g_1(\gamma_4(t)), 0, g_2(\gamma_4(t))) \cdot \gamma_4'(t) dt = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{3} \sin^2(t) + 2\sqrt{3} \sin(t) \cos(t), 0, \sin(t) \cos^2(t) \right) \cdot$$

$$\cdot (-\sin(t), \cos(t), 0) dt +$$

$$- \int_0^{\pi/2} \left(3 \sin^2(t) + 6 \cos(t) \sin(t), 0, 3\sqrt{3} \sin(t) \cos^2(t) \right) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{3} (-\sin(t), \cos(t), 0) dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\sqrt{3} \sin^2(t) - 2\sqrt{3} \sin^2(t) \cos(t) + \right.$$

$$\left. + 3\sqrt{3} \sin^3(t) + 6\sqrt{3} \cos(t) \sin^2(t) \right] dt =$$

$$= 2\sqrt{3} \int_0^{\pi/2} \sin(t) (1 - \cos^2(t)) dt + 4\sqrt{3} \int_0^{\pi/2} \cos(t) \sin^2(t) dt =$$

$$= 2\sqrt{3} \left[-\cos(t) \right]_0^{\pi/2} + 2\sqrt{3} \left[\frac{1}{3} \sin^3(t) \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{3} \sqrt{3}.$$

