

Clases 11, 12: Ejercicios

2 g

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Derivada de f en $(0, 0)$ en dirección de $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$.

Sol:

Como f no es continua en $(0, 0)$ (basta estudiar $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \frac{m}{1+m^2}$),

sabemos que f no es diferenciable. $\perp$

Calculamos la derivada usando la definición:

$$\vec{u} = (\sqrt{3}, 1) \rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{hv_1 \cdot hv_2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\sqrt{3}}{4} = \infty. \end{aligned}$$

4.

a) $z = e^{-x^2-y^2}$

Recta normal, plano tangente en $(0,0)$.

Sol:

Definimos $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = z - e^{-(x^2+y^2)} \left\{ \right.$$

de forma que la superficie $z = e^{-(x^2+y^2)}$ es la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$.

$$\nabla F(x, y, z) = (2x e^{-(x^2+y^2)}, 2y e^{-(x^2+y^2)}, 1)$$

En $(0,0)$: $z = e^0 = 1 \rightarrow \nabla F(0,0,1) = (0,0,1)$.

Recta normal:
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Plano tangente: $((x, y, z) - (0,0,1)) \cdot (0,0,1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = 1$$

5) $f(x, y) = x^2 y + 2y^2 x$, $\alpha = (1, 3)$

a) $\nabla f(x, y) = (2xy + 2y^2, x^2 + 4xy) \rightarrow$

$$\rightarrow \underbrace{\nabla f(1,3)}_{\text{dirección máx. acc. en } (1,3)} = (6+18, 1+12) = (24, 13).$$

$$b) \|\nabla f(1,3)\| = \sqrt{24^2 + 13^2}.$$

$$\text{II En efecto, } \vec{u} = \frac{\nabla f(1,3)}{\|\nabla f(1,3)\|},$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(1,3) &= \vec{u} \cdot \nabla f(1,3) = \frac{\nabla f(1,3)}{\|\nabla f(1,3)\|} \cdot \nabla f(1,3) = \\ &= \frac{\|\nabla f(1,3)\|^2}{\|\nabla f(1,3)\|} = \|\nabla f(1,3)\|. \end{aligned}$$

□

$$c) \text{ Sea } \vec{u} = (u_1, u_2) / D_{\vec{u}} f(1,3) = 0.$$

Es decir,

$$D_{\vec{u}} f(1,3) = (u_1, u_2) \cdot \nabla f(1,3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24u_1 + 13u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = -\frac{24}{13}u_1.$$

Cualquier dirección de la forma $(13, -24)$ da derivada nula.

$$d) \text{ Defino } F(x,y,z) = z - f(x,y),$$

$$\nabla F(1, 3, 2) = (-24, -13, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Plano tangente: } (x-1, y-3, z-2) \cdot (-24, -13, 1) = 0$$

Es decir, $-24x - 13y + z + 42 = 0.$

6

j) $f(x, y) = \frac{x y^2}{x^2 + y^4}, f(0, 0) = 0.$

• Continuidad: No es continua en $(0, 0)$ pues

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = m\sqrt{x}}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = m\sqrt{x}}} \frac{m^2 x^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m^2}{1+m^2}.$$

• Parciales:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0. \end{aligned} \right| \Rightarrow \nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• Diferenciabilidad

No es continua en $(0, 0) \Rightarrow$ No es diferenciable en $(0, 0).$

$$k) f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f(0, 0) = 0.$$

• Continuidad:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$\uparrow$
 pues $0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0.$

• Parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

$$\Rightarrow \nabla f(0, 0) = (0, 0).$$

• Diferenciabilidad:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot ((x, y) - (0, 0))}{\|(x, y) - (0, 0)\|} =$$

$$= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Vemos que el límite no existe, pues

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x^2}{(1 + m^2) x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Por tanto, no es diferenciable en $(0,0)$.

$$m) f(x,y) = xy \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

• Continuidad: Continua en $(0,0)$ pues

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

$$\text{pues } 0 < \left| xy \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right| \leq |xy| \rightarrow 0.$$

• Parciales:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0).$$

• Diferenciabilidad:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

pues

$$0 \leq \frac{\left| xy \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \rightarrow 0.$$

Por tanto, f es dif. en $(0,0)$.

$$a) f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \quad f(0,0) = (0,0).$$

• Continuidad: Continuo en $(0,0)$ pues

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

$$0 < \frac{|x^3|}{x^2+y^2} \leq |x| \rightarrow 0.$$

• Parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - 0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (1,0).$$

• Diferenciabilidad:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Vemos que el límite no existe:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 \cancel{x^3}}{(1+m^2)^{3/2} \cancel{x^3}} = \frac{m^2}{(1+m^2)^{3/2}}$$

Portanto, f não é dif. em $(0,0)$.

9

a) $f(x,y) = \cos(xy)$, $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$.

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = \cos(e^{2t} \cdot e^{3t}) = \cos(e^{5t}).$$

1) $g'(t) = -\sin(e^{5t}) \cdot e^{5t} \cdot 5$

2) $g'(t) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)),$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f(x,y) = (-y \sin(xy), -x \cos(xy)) \\ x'(t) = 2e^{2t}, y'(t) = 3e^{3t} \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g'(t) &= \left(-e^{3t} \sin(e^{2t}e^{3t}) \right) 2e^{2t} + \left(-e^{2t} \cos(e^{2t}e^{3t}) \right) 3e^{3t} = \\ &= -5e^{5t} \sin(e^{5t}) \end{aligned}$$

b) $f(x,y,z) = x^2 + xyz$, $x = 2\cos(t)$, $y = 2\sin(t)$,
 $z = t^2$.

$$g(t) = f(2\cos(t), 2\sin(t), t^2) =$$

$$= 4\cos^2(t) + 4\cos(t)\sin(t)t^2 = 4\cos^2 t + 2\sin(2t)t^2.$$

$$1) \quad g'(t) = -8\cos(t)\sin(t) + 4\cos(2t)t^2 + 4\sin(2t)t.$$

$$2) \quad g'(t) = \nabla f(2\cos(t), 2\sin(t), t^2) \cdot (-2\sin(t), 2\cos(t), 2t)$$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + y^2, x^2, xy)$$

$$g'(t) = (4\cos(t) + 2t^2\sin(t))(-2\sin(t)) +$$

$$+ 2t^2\cos(t) \cdot 2\cos(t) + 4\cos(t)\sin(t)2t$$

$$= -8\cos(t)\sin(t) - 4t^2\sin^2(t) + 4t^2\cos^2(t) + 8t\cos(t)\sin(t) =$$

$$= -8\cos(t)\sin(t) + 4t^2\cos(2t) + 4t\sin(2t) //$$

$$\boxed{26} \quad f(x, y) = \frac{x^3y + y^3}{x^4 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

$$a) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3y + y^3}{x^4 + y^2}$$

Notemos que

$$0 < \frac{|x^3y|}{x^4 + y^2} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^4 + y^2)|x|}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2}|x| \rightarrow 0,$$

$$0 < \frac{|y|^3}{x^4 + y^2} \leq \frac{y^2}{y^2 + x^4} |y| \leq |y| \rightarrow 0,$$

por tanto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^3 y}{x^4 + y^2} + \frac{y^3}{x^4 + y^2} \right) = 0.$$

Definimos pues $f(0,0) = 0$.

b) Parciales.

$$(x,y) \neq (0,0): \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2 y)(x^4 + y^2) - (x^3 y + y^3)4x^3}{(x^4 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^3 + 3y^2)(x^4 + y^2) - (x^3 y + y^3)2y}{(x^4 + y^2)^2},$$

$$\text{En } (0,0): \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1.$$

$$\begin{aligned} c) D_{(u_1, u_2)} f(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4 u_1^3 u_2 + h^3 u_2^3}{h^4 u_1^4 + h^2 u_2^2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h u_1^3 u_2 + u_2^3}{h u_1^4 + u_2^2} = u_2. \end{aligned}$$

- En $(1,1)$ $f(x,y)$ es diferenciable al ser cociente de polinomios. Por tanto,

$$D_{(u_1, u_2)} f(1,1) = (u_1, u_2) \cdot \nabla f(1,1) \quad \text{con } u_1^2 + u_2^2 = 1.$$

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{6-8}{4}, \frac{8-4}{4} \right) = \left(-\frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$D_{(u_1, u_2)} f(1,1) = u_2 - \frac{1}{2} u_1.$$

- Vemos que la igualdad $D_{\vec{u}} f(a,b) = \vec{u} \cdot \nabla f(a,b)$ se cumple para todo punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

→ En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es cierto por ser f diferenciable (cociente de polinomios).

→ En $(0,0)$, hemos calculado

$$D_{(u_1, u_2)} f(0,0) = u_2 = (u_1, u_2) \cdot (0,1) \quad \checkmark.$$

d) Diferenciabilidad de f : solo hay que estudiar el $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot ((x,y) - (0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3 y + y^3}{x^4 + y^2} - (0,1) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y + \cancel{y^3} - y^4 - \cancel{y^3}}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y (1 - x)}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}},$$

Problemas con $y = mx^2$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y = mx^2}} \frac{x^3 y}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x^5}{(1 + m^2) x^5 \sqrt{1 + m^2 x^2}} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Por lo tanto, el límite doble no existe. Luego f no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejercicios: Diapópteros.

Clase 13 : Matriz Jacobiana. Derivadas sucesivas.

• Diferenciabilidad de campos vectoriales

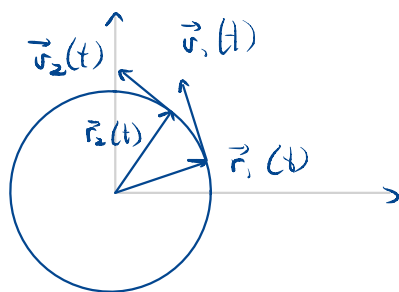
$$1) \text{ Caso } n=1: \left. \begin{array}{l} \vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \\ t \mapsto \vec{f}(t) \end{array} \right\}$$

Se dice que $\vec{f}$ es derivable en t_0 si cada función componente lo es, es decir,

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_k(t) - f_k(t_0)}{t - t_0} \quad \text{para } k=1, \dots, m.$$

Nota: El vector $\vec{f}(t)$ representa una curva y su derivada $\vec{f}'(t)$ el vector tangente.

Ej: Vector posición $\vec{r}(t)$ y velocidad $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$.



$$2) \text{ Caso general: } \vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

• Def: Se dice que $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ si cada función componente $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lo es.

Esto es, cada componente se aproxima bien por la aplicación lineal dada por su diferencial en el punto:

$$f_k(\vec{x}) = f_k(\vec{x}_0) + \nabla f_k(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + R_k(\vec{x}, \vec{x}_0),$$

donde $R_k(\vec{x}, \vec{x}_0) = o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$, es decir,

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{R_k(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{f_k(\vec{x}) - f_k(\vec{x}_0) - \nabla f_k(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

→ Notemos que para cualquier $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, podemos escribir $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}$:

$$(u_1, \dots, u_n) \cdot (v_1, \dots, v_n) = (u_1 \dots u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Entonces, podemos reescribir la condición de diferenciabilidad para $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de forma más compacta:

$\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ si se "puede aproximar bien" por una aplicación lineal $D\vec{f}(\vec{x}_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Veamos cuál es su expresión:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}_0) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \nabla f_1(\vec{x}_0)^T (\vec{x} - \vec{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_k(\vec{x}_0)^T (\vec{x} - \vec{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x}_0)^T (\vec{x} - \vec{x}_0) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz } m \times n \\ \text{Vector } n \times 1}} + \begin{bmatrix} R_1(\vec{x}, \vec{x}_0) \\ \vdots \\ R_k(\vec{x}, \vec{x}_0) \\ \vdots \\ R_m(\vec{x}, \vec{x}_0) \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \nabla f_1(\vec{x}_0)^T \\ \vdots \\ \nabla f_k(\vec{x}_0)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x}_0)^T \end{bmatrix}}_{\text{Matriz } m \times n} \underbrace{(\vec{x} - \vec{x}_0)}_{\text{Vector } n \times 1}
 \end{aligned}$$

- Def: Dada $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\vec{x}_0$, se llama matriz Jacobiana de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$ a su diferencial, es decir, a la matriz

$$D\vec{f}(\vec{x}_0) \equiv J\vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(\vec{x}_0) & \partial_2 f_1(\vec{x}_0) & \dots & \partial_n f_1(\vec{x}_0) \\ \partial_1 f_2(\vec{x}_0) & \partial_2 f_2(\vec{x}_0) & \dots & \partial_n f_2(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(\vec{x}_0) & \partial_2 f_m(\vec{x}_0) & \dots & \partial_n f_m(\vec{x}_0) \end{bmatrix}$$

$$\left[J\vec{f}(\vec{x}_0) \right]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)$$

Como acabamos de ver, la matriz Jacobiana tiene por filas los vectores gradiente de las funciones componente.

Nota: Podemos entonces decir que $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ si

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + J\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{R}(\vec{x}, \vec{x}_0),$$

con $\|\vec{R}(\vec{x}, \vec{x}_0)\| = o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$

Nota: Si $n=m$, al determinante de la matriz Jacobiana se le llama Jacobiano.

• Propiedades: Si $\vec{f}, \vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciables en $\vec{x}_0$, entonces,

1) $\vec{f} + \vec{g}$ también y $J(\vec{f} + \vec{g})(\vec{x}_0) = J\vec{f}(\vec{x}_0) + J\vec{g}(\vec{x}_0)$.

2) El campo escalar $\vec{f} \cdot \vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ también y

$$D(\vec{f} \cdot \vec{g})(\vec{x}_0)(\vec{x}) = (D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{x})) \cdot \vec{g}(\vec{x}_0) + \vec{f}(\vec{x}_0) \cdot (D\vec{g}(\vec{x}_0)(\vec{x})),$$

es decir,

$$\nabla(\vec{f} \cdot \vec{g}) = (J\vec{f})^T \vec{g} + (J\vec{g})^T \vec{f}.$$

Es fácil usando índices: $[J\vec{f}]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$,

$$[\nabla(\vec{f} \cdot \vec{g})]_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta_{ij} g_j) = \delta_{xi} \delta_{ij} g_j + \delta_{ij} \delta_{xi} g_j$$

$\uparrow$
 Notación de Einstein $\equiv \sum_{j=1}^m \delta_{ij} g_j$

3) (Si $m=3$)

$$\nabla(\vec{f} \times \vec{g})(\vec{x}_0) \vec{x} = (\nabla \vec{f}(\vec{x}_0) \vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}_0) + \vec{f}(\vec{x}_0) \times (\nabla \vec{g}(\vec{x}_0) \vec{x})$$

• Derivadas parciales de orden superior:

Se definen de forma sucesiva:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(\vec{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_x f(\vec{x}_0 + h \vec{e}_1) - \partial_x f(\vec{x}_0)}{h}$$

Análogamente, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$

y las derivadas cruzadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

• Def. Se dice que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^k (en un conjunto abierto D) si sus derivadas parciales existen y son continuas (en D).

• Teorema: [de Schwarz]

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\exists D_{xy}f$ y $D_{yx}f$ en un entorno de $\vec{x}_0$ y son continuas en $\vec{x}_0$, entonces

$$D_{xy}f(\vec{x}_0) = D_{yx}f(\vec{x}_0).$$

$$\begin{aligned} \text{Ej: } f(x,y) = \sin(xy) &\rightarrow D_{xy}f(x,y) = D_x(x \cos(xy)) = -xy \sin(xy), \\ &\quad \downarrow \\ &\quad D_{yx}f(x,y) = D_y(y \cos(xy)) = -xy \sin(xy). \end{aligned}$$

Nota: En general no es cierto.

Ejemplo:
(~ 10)
$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calculamos $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0)$, $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{-2y(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_y f(h,0) - \partial_y f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \frac{h^2}{h^2}}{h} = 1,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_x f(0,h) - \partial_x f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \frac{-h^2}{h^2}}{h} = -1.$$

→ Comprueba que $\partial_{yx} f$ no es continua en $(0,0)$.

• Def: [Matriz Hessiana]

Dada $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se llama matriz Hessiana de f a

$$Hf(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1 x_1}^2 f(\vec{x}) & \partial_{x_1 x_2}^2 f(\vec{x}) & \dots & \partial_{x_1 x_n}^2 f(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \partial_{x_n x_1}^2 f(\vec{x}) & \partial_{x_n x_2}^2 f(\vec{x}) & \dots & \partial_{x_n x_n}^2 f(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

Por T^o Schwarz, si las entradas son continuas, la matriz Hessiana es simétrica.

A su determinante se le llama Hessiano.

Ex. 8 b), d) d Jf?

b) $f(x, y, z) = (x + y + z, y, x^2)$

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_1(x, y, z) = x + y + z,$

$f_2(x, y, z) = y,$

$f_3(x, y, z) = x^2.$

$$Jf(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_z f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_z f_2 \\ \partial_x f_3 & \partial_y f_3 & \partial_z f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $f(r, \vartheta, \varphi) = (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$Jf(r, \vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} \partial_r f_1 & \partial_\vartheta f_1 & \partial_\varphi f_1 \\ \partial_r f_2 & \partial_\vartheta f_2 & \partial_\varphi f_2 \\ \partial_r f_3 & \partial_\vartheta f_3 & \partial_\varphi f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \cos \varphi & -r \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |Jf(r, \vartheta, \varphi)| &= r^2 \cos^2 \vartheta \cos^3 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin^2 \varphi + \\ &\quad + r^2 \cos^2 \vartheta \cos \varphi \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \cos \varphi = \\ &= r^2 \cos^2 \varphi \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi = r^2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Clase 14: Regla de la cadena

Sabemos ya que si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dt} (f(\vec{g}(t))) = \nabla f(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{g}(t)) g'_j(t).$$

- De forma similar, si tenemos por ejemplo

$$\left. \begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned} \right\}$$

y el cambio de variables $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, entonces podemos calcular las parciales de la nueva función $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} (f(x(u, v), y(u, v))) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v),$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v).$$

Ejemplo: Cambio a polares

$$\left. \begin{aligned} x(r, \theta) &= r \cos \theta \\ y(r, \theta) &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \leadsto \tilde{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r, \theta) \mapsto (x, y) = \tilde{g}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Dada } f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned} \right\} \text{ "¿ } \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \text{ ?"}$$

Nota: A veces se abusa de notación y se escribe $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}$ para denotar las parciales de f tras cambiar variables, esto es, $\frac{\partial}{\partial r} (f(x(r, \theta), y(r, \theta)))$.

Realmente tenemos una nueva función definida por composición: $\tilde{f}(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$.

Así,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta),$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta).$$

Esto es:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta.$$

Nota: Observamos en el ejemplo que

$$\begin{bmatrix} \partial_r \tilde{f}(r, \theta) \\ \partial_\theta \tilde{f}(r, \theta) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial_x f(r, \theta) & \partial_y f(r, \theta) \end{bmatrix}}_{\nabla f^T(r, \theta) \equiv Jf(r, \theta)} \underbrace{\begin{bmatrix} \partial_r x(r, \theta) & \partial_\theta x(r, \theta) \\ \partial_r y(r, \theta) & \partial_\theta y(r, \theta) \end{bmatrix}}_{J\vec{g}(r, \theta)}$$

• Teorema: Regla de la cadena.

Sean $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$, $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$\vec{g} = (g_1, \dots, g_n)$, $\vec{g} : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}^n$

con $\vec{g}$ diferenciable en $\vec{x}_0$ y $\vec{f}$ dif. en $\vec{y}_0 = \vec{g}(\vec{x}_0)$.

Entonces, $\vec{h} = \vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}^m$ es dif. en $\vec{x}_0$, y

$$J\vec{h}(\vec{x}_0) = J\vec{f}(\vec{y}_0) J\vec{g}(\vec{x}_0)$$

→ En el ejemplo anterior, $j = n = 2$, $m = 1$.

[para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $Jf = \nabla f^T$].

Nota: Sea por ejemplo $g=3, n=2, m=2$,

$$\vec{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{y} \mapsto \vec{g}(\vec{y}) \end{array} \right\} \quad \vec{h} = \vec{g} \circ \vec{g}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial x_2} (f_1(\vec{g}(\vec{x})))?$$

$$\text{Es decir, } \frac{\partial}{\partial x_2} (f_1(g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3))) ?$$

Tenemos que

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2} (f_1(\vec{g}(\vec{x})))}_{\downarrow} = \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{g}(\vec{x})) \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\vec{x}) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\vec{g}(\vec{x})) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\vec{x})}_{\text{" "}} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\vec{x}) \end{array} \right]$$

$$[J\vec{h}(\vec{x})]_{1,2} = \text{"fila 1 de } J\vec{g} \cdot \text{"columna 2 de } J\vec{g} \text{"}$$