$\boxed{\text{Clases 15, 16}}$: Teorema de la Función Implícita.

• Ejercicio: $\boxed{36}$ Escribir en polares la ecuación

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Sol: $\left.\begin{aligned} x(r,\theta) &= r\cdot\cos\theta \\ y(r,\theta) &= r\cdot\sin\theta \end{aligned}\right\}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}, \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \partial_r f(r,\theta) \\ \partial_\theta f(r,\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x f(r,\theta) \\ \partial_y f(r,\theta) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \partial_x f(r,\theta) \\ \partial_y f(r,\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \partial_r f(r,\theta) \\ \partial_\theta f(r,\theta) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_r f \\ \partial_\theta f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\,\partial_r f - \frac{1}{r}\sin\theta\,\partial_\theta f \\ \sin\theta\,\partial_r f + \frac{1}{r}\cos\theta\,\partial_\theta f \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la ecuación queda

$$r\cos\theta\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + r\sin\theta\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = 0$$

$$\iff r\,\frac{\partial f}{\partial r} = 0.$$

<u>Nota:</u> Solución de la ecuación $\rightarrow \partial_r f(r,\theta) = 0 \Rightarrow$

$\rightarrow f(r,\theta) = g(\theta)$. ¿Interpretación en (x,y)?

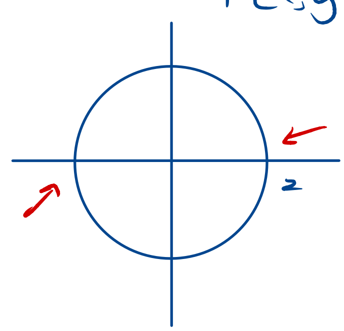
• La función implícita

En $\mathbb{R}^2$, una ecuación del tipo $F(x,y)=0$ nos describe conjuntos típicamente en forma de curvas. Por ejemplo,

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0,$$

representa una circunferencia

$F(x,y)=0$.



En este caso concreto, podemos también escribir la curva como un grafo, despejando y dado x:

$$F(x,y) = 0 \rightsquigarrow y^2 = 4 - x^2 \rightsquigarrow y = \pm\sqrt{4-x^2}$$

→ En un entorno de $x = \pm 2$, $\nexists\, y = y(x)$, necesitamos dos ramas.

→ En general, dada $F(x,y) = 0$:

1) No siempre es posible encontrar $y = y(x)$ / $F(x, y(x)) = 0$,

2) Es difícil encontrar la expresión explícita de $y = y(x)$ (cuando existe).

Objetivo: Determinar condiciones que garantices cuando $F(x,y) = 0 \Longrightarrow y = y(x)$,

y cómo obtener información o aproximaciones de $y(x)$.

Ej.: $\sin(xy) + y^2 = 2$. ¿Recta tangente en $(0, -\sqrt{2})$?

Comprobamos que $x = 0$, $y = -\sqrt{2}$ resuelve la ecuación, es decir, es un punto de la curva.

¿Tangente?

Si $y = y(x)$: $y - (-\sqrt{2}) = y'(0)(x - 0) \rightarrow$ ¿$y'(0)$?

Veamos: si $y = y(x)$,

$$\sin(x\,y(x)) + (y(x))^2 = 0 \quad \xrightarrow{\frac{d}{dx}}$$

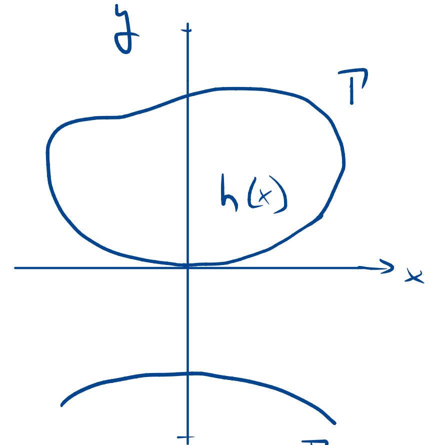
$$\Rightarrow \cos(x\,y(x))\big(y(x) + x\,y'(x)\big) + 2\,y(x)\,y'(x) = 0 .$$

En $x = 0$, $y(0) = -\sqrt{2}$:

$$\cos(0)\cdot(-\sqrt{2} + 0) - 2\sqrt{2}\,y'(0) \Rightarrow y'(0) = -\frac{1}{2} .$$

Por tanto, recta tangente en $(0,-\sqrt{2})$ es

$$y + \sqrt{2} = -\frac{x}{2} .$$

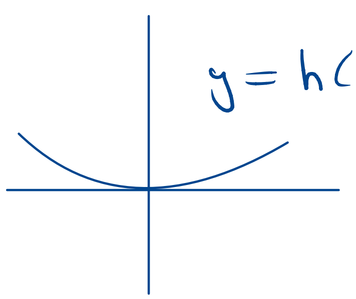


Ejercicio: Sea Γ la curva

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 - y^3 + 2y = 0\}$$

¿Cómo encontrar $h(x)$ que describa Γ cerca del origen?

Sol: Cerca del origen tenemos que si $y = h(x)$,



$$\begin{cases} -x^2 - (h(x))^3 + 2\,h(x) = 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

No sabemos despejar $h(x)$, pero

sí sabemos calcular $h'(0)$:

$$-2x - 3h(x)^2 h'(x) + 2h'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{2x}{2-3(h(x))^2}$$

Como $h(0) = 0 \rightarrow h'(0) = 0$.

Podemos repetir el proceso para calcular $h''(0)$:

$$h''(x) = \frac{2(2-3h(x)^2) + 2x \cdot 6h(x)h'(x)}{(2-3h(x)^2)^2} \Rightarrow h''(0) = 1.$$

Podríamos seguir y calcular $h'''(0), \dots$
Es decir, podemos obtener el polinomio de Taylor de $h(x)$ en $x=0$ de grado n!

En particular, hemos calculado ya que

$$h(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Resumen: Derivación implícita en una variable

$$F(x,y)=0 \xrightarrow[y=y(x)]{} F(x,y(x))=0 \xrightarrow[\frac{d}{dx}]{}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\, y'(x) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad y'(x) = -\frac{\partial_x F(x, y(x))}{\partial_y F(x, y(x))}$$

$\uparrow$

Si $\partial_y F(x, y(x)) \neq 0$.

• <u>Teorema</u>: [de la Función Implícita]

Sean $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ abierto, $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ /

1) $F \in C^1(\mathcal{U})$,

2) $F(x_0, y_0) = 0$,

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

entonces $F(x, y) = 0$ define implícitamente a y como función de x en un entorno de (x_0, y_0), i.e.,

$y = h(x)$ para $x \in B_\delta(x_0)$.

Además, h es derivable con derivada

$$h'(x) = -\frac{\partial_x F(x, h(x))}{\partial_y F(x, h(x))}.$$

Análogamente,

- Teorema:

Sea $F: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ abierto, $(\vec{x}_0, y_0) \in \mathcal{U}$ /

1) $F \in C^1(\mathcal{U})$,

2) $F(\vec{x}_0, y_0) = 0$,

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$.

Entonces, $F(\vec{x}, y) = 0 \Rightarrow y = h(\vec{x})$ en un entorno de $\vec{x}_0$.

Además,

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{x}) = - \frac{\partial_{x_j} F(\vec{x}, h(\vec{x}))}{\partial_y F(\vec{x}, h(\vec{x}))}, \quad j = 1, \dots, n$$

- Ejercicio $\boxed{14}$: $\log(xy) - x \cdot \cos(\frac{\pi}{2} y) = 0$.

¿ Define $y = y(x)$ con $y(1) = 1$? ¿ $y''(1)$?

Sol:
$$\begin{cases} F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto F(x, y) = \log(x \cdot y) - x \cdot \cos(\frac{\pi}{2} y) \end{cases}$$

1) $F \in C^1$ en su dominio, $D(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$.

2) $F(1, 1) = 0$

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = \left(\frac{x}{xy} + x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} y) \frac{\pi}{2} \right) \Big|_{(x,y)=(1,1)} = 1 + \frac{\pi}{2} \neq 0$.

Por el TFJ, $\exists\, y = y(x)$ en un entorno de $(1,1)$, y

$y(1) = 1$,

$$y'(1) = -\frac{\partial_x F(1,1)}{\partial_y F(1,1)}.$$

Calculamos $\partial_x F(1,1) = \left(\frac{1}{x} - \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right)\right)\Big|_{(1,1)} = 1$,

por tanto $y'(1) = -\dfrac{1}{1+\frac{\pi}{2}}$.

$\rightarrow$ "Otra forma": $\log(x y(x)) - x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} y(x)\right) = 0 \longrightarrow$

$$\overset{(*)}{\rightarrow} \frac{1}{x y(x)}\left(y(x) + x y'(x)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} y(x)\right) + x \frac{\pi}{2} y'(x) \sin\left(\frac{\pi}{2} y(x)\right) = 0$$

$$\rightarrow (1 + y'(1)) + \frac{\pi}{2} y'(1) = 0 \rightarrow \quad y'(1) = \frac{-1}{1+\frac{\pi}{2}}.$$

- ¿ $y''(1)$?

Podemos volver a derivar en $(*)$, evaluar en $x=1$, y despejar.

Lo hacemos en general:

$$F(x, y(x)) = 0 \longrightarrow \frac{d}{dx}\left(F(x, y(x))\right) = 0 \longrightarrow$$

$$\rightarrow \partial_x F(x, y(x)) + \partial_y F(x, y(x))\, y'(x) = 0 \longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \partial_x^2 F(x,y(x)) + \partial_{yx} F(x,y(x))\, y'(x) +$$

$$+ \partial_{xy} F(x,y(x))\, y'(x) + \partial_y^2 F(x,y(x))(y'(x))^2 +$$

$$+ \partial_y F(x,y(x))\, y''(x) = 0.$$

Calculamos:

$$\partial_x^2 F(x,y) = \frac{-1}{x^2}, \quad \partial_{yx} F(x,y) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right) = \partial_{xy} F(x,y),$$

$$\partial_y^2 F(x,y) = \frac{-1}{y^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 x \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right),$$

$$\Rightarrow \partial_x^2 F(1,1) = -1, \quad \partial_{xy} F(1,1) = \frac{\pi}{2}, \quad \partial_y^2 F(1,1) = -1.$$

Así,

$$-1 + \pi\, y'(1) - (y'(1))^2 + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) y''(1) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y''(1) = \frac{1 - \pi y'(1) + y'(1)^2}{\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad y'(1) = \frac{-1}{1 + \frac{\pi}{2}}.$$

- Ejercicio $\boxed{17}$ d):

$$(x + y + z) z^2 + x^2 + y^2 = 5, \quad z(-2,1) = 1.$$

¿ $z = z(x,y)$? ¿ $\partial_x z(-2,1)$, $\partial_y z(-2,1)$? ¿ Plano tangente?

Sol: $F(x,y,z) = (x+y+z)z^2 + x^2 + y^2 - 5.$

$F(-2,1,1) = 0, \quad F \in C^1(\mathbb{R}^3),$

- $z = z(x,y) \to F(x,y,z(x,y)) = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \partial_x F(x,y,z(x,y)) + \partial_z F(x,y,z(x,y))\, \partial_x z(x,y) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \partial_x z(x,y) = -\frac{\partial_x F(x,y,z(x,y))}{\partial_z F(x,y,z(x,y))}$$

Análogamente, $\partial_y z(x,y) = -\dfrac{\partial_y F(x,y,z(x,y))}{\partial_z F(x,y,z(x,y))}$.

Calculamos:

$\partial_x F(x,y,z) = z^2 + 2x,$

$\partial_y F(x,y,z) = z^2 + 2y,$

$\partial_z F(x,y,z) = 2xz + 2yz + 3z^2.$

Como $\partial_z F(-2,1,1) = 1 \neq 0$, por el TFJ existe $z = z(x,y)$ y

$$\partial_x z(-2,1) = -\frac{1-4}{1} = 3,$$

$$\partial_y z(-2,1) = -\frac{1+2}{1} = -3.$$

- ¿Plano tangente a $z = z(x,y)$ en $(-2,1,1)$?

El plano tangente es su aproximación lineal:

$$z = z(-2,1) + \nabla z(-2,1)\cdot(x+2, y-1) = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow z - 1 = 3(x+2) - 3(y-1).$$

Clase 17: Ejercicios. Función inversa. Taylor.

- Ejercicio: 19 a)

$$\begin{array}{l} 1)\ xu + yv - uv = 1 \\ 2)\ yu - xv + uv = 0 \end{array} \Bigg\} \longrightarrow \begin{array}{l} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{array}, \quad ¿\ \begin{array}{l} \partial_x u, \partial_y u \\ \partial_x v, \partial_y v \end{array}\ ?$$

Punto $u(1,-1) = \frac{1}{3}$, $v(1,-1) = \frac{-1}{2}$.

Sol:

$$\xrightarrow{\partial_x 1)} \quad u + xu_x + yv_x - u_x v - uv_x = 0 \qquad \xrightarrow{\text{En } x=1,\ y=-1}$$

$$\partial_x 2) \quad yu_x - v - xv_x + u_x v + uv_x = 0$$

$$\longrightarrow \quad u(1,-1) + u_x(1,-1) - v_x(1,-1) - u_x(1,-1)\, v(1,-1) - u(1,-1)\, v_x(1,-1) = 0,$$

$$-u_x(1,-1) - v(1,-1) - v_x(1,-1) + u_x(1,-1)\, v(1,-1) + u(1,-1)\, v_x(1,-1) = 0$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 - v(1,-1) & -1 - u(1,-1) \\ -1 + v(1,-1) & -1 + u(1,-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(1,-1) \\ v_x(1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u(1,-1) \\ v(1,-1) \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 3/2 & -4/3 \\ -3/2 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(1,-1) \\ v_x(1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} u_x(1,-1) \\ v_x(1,-1) \end{array}$$

• En general, dado el sistema

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{array}\right\}$$

el TFI nos dice cuándo podemos obtener las variables y_i como funciones de las x_i.

$\equiv \vec{F}(\vec{x},\vec{y})=\vec{0}$ con $\vec{F}:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m$.

• Teorema: Sea $\vec{F}:U\subset\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m$, U abierto, $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\in U$.

Si

1) $\vec{F}\in C^1(U)$,

2) $\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)=0$,

3) $\det(J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0))\neq 0$,

entonces $\vec{F}(\vec{x},\vec{y})=\vec{0}$ define a $\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})$ en un entorno de $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.

Además, $\vec{f}\in C^1$, y sus parciales vienen dadas por la solución del sistema lineal

$$J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{f}(\vec{x}))\,\partial_{x_j}\vec{f}(\vec{x})=-\partial_{x_j}\vec{F}(\vec{x},\vec{f}(\vec{x})).$$

<u>Nota:</u> $J_{\vec{y}}\vec{F}$ denota la matriz Jacobiana de $\vec{F}$ respecto a las variables y_j:

$$J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{bmatrix} \partial_{y_1}F_1(\vec{x},\vec{y}) & \cdots & \partial_{y_m}F_1(\vec{x},\vec{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{y_1}F_m(\vec{x},\vec{y}) & \cdots & \partial_{y_m}F_m(\vec{x},\vec{y}) \end{bmatrix}$$

• <u>Ejemplo:</u> $\left.\begin{aligned} F_1(x,y,u,v)=0 \\ F_2(x,y,u,v)=0 \end{aligned}\right\}$ ¿ $\partial_x u, \partial_x v, \partial_y u, \partial_y v$?

$$\xrightarrow{\partial_x} \left.\begin{aligned} \partial_x F_1 + \partial_u F_1\, \partial_x u + \partial_v F_1\, \partial_x v = 0 \\ \partial_x F_2 + \partial_u F_2\, \partial_x u + \partial_v F_2\, \partial_x v = 0 \end{aligned}\right| \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \partial_u F_1 & \partial_v F_1 \\ \partial_u F_2 & \partial_v F_2 \end{bmatrix}}_{J_{(u,v)}\vec{F}} \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_x v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial_x F_1 \\ \partial_x F_2 \end{bmatrix}$$

Análogamente para $\partial_y u, \partial_y v$.

<u>Ejercicios:</u> $\boxed{17}$ a) $\boxed{19}$ b) $\boxed{47}$

Función inversa

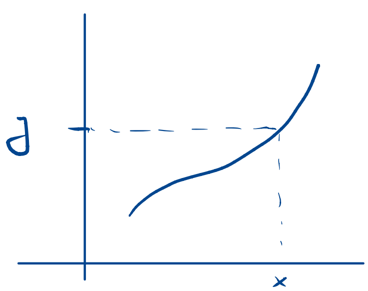
Dada $\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array}\right\}$ definimos la función inversa

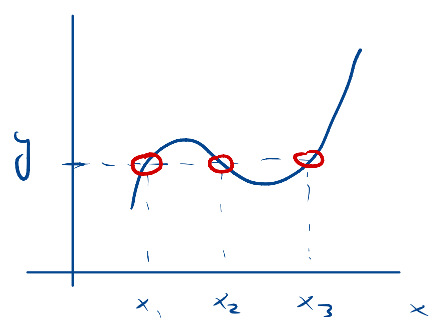
como $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y .$$

Por ejemplo, si $f(x) = e^x$, su inversa era $f^{-1}(x) = \log(x)$, pues $e^x = y \iff x = \log(y)$.

→ Para definir la inversa, necesitamos que la función sea inyectiva:





$f^{-1}(y)$??

En general, solo podemos definir la inversa localmente, es decir, en un entorno de un punto dado.

→ Para $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ necesitamos también que $\vec{f}$ sea inyectiva. En general, sólo existirá la inversa en un entorno de un punto dado.
Pese a que calcular tal función es en general difícil, podemos obtener una aproximación.

<u>Ej</u>: $\left.\begin{array}{l} \vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \vec{x} \longmapsto M\vec{x} \end{array}\right\}$ con $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$

En este caso, si M es invertible, $\vec{y} = M\vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = M^{-1}\vec{y}$, luego $\vec{f}^{-1}(\vec{y}) = M^{-1}\vec{y}$.

• <u>Teorema</u>: [De la función inversa]

Sea $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{f} \in C^1(A)$, $\vec{x}_0 \in A$.

Si $|J\vec{f}(\vec{x}_0)| \neq 0$, entonces

$\exists\, \vec{f}^{-1}$ en un entorno de $\vec{f}(\vec{x}_0)$, es de clase C^1, y

$$J\vec{f}^{-1}(\vec{y}) = (J\vec{f}(\vec{x}))^{-1} \quad \text{con } \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}).$$

¶ <u>Nota</u>: Se puede ver como un caso particular del T^{ma} de la función implícita. En efecto, dada $\vec{f}(\vec{x})$,

queremos ver si la ecuación $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$ define a $\vec{x}$ como función de $\vec{y}$,
es decir, si existe $\vec{g}$ / $\vec{x} = \vec{g}(\vec{y})$.

¿ $F(\vec{y}, \vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}) - \vec{y} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{g}(\vec{y})$?

$\hookrightarrow$ 1) $F(\vec{y}_0, \vec{x}_0) = 0$ con $\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0)$.

2) Necesitábamos $\underbrace{|J_{\vec{x}} F(\vec{x}_0, \vec{y}_0)|}_{= |J\vec{f}(\vec{x}_0)|} \neq 0$.

$$\underbrace{|J_{\vec{x}} F(\vec{x}_0, \vec{y}_0)|} \equiv |J\vec{f}(\vec{x}_0)| \ //$$

$\lrcorner$

- Ejercicio: Probar que $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + y^3 \\ -3y + x^3 \end{pmatrix}$$

tiene inversa local en el punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$.
Calcular su aproximación lineal.

Sol: $\vec{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$J\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3y^2 \\ 3x^2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |J\vec{f}(x,y)| = 9 - 9x^2y^2 \Rightarrow |J\vec{f}(1,0)| = 9 \neq 0.$$

Por tanto, por el TFI, existe

$$\vec{f}^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}, \quad \text{y se tiene que}$$

$$J\vec{f}^{-1}(-3,1) = \left(J\vec{f}(1,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} \equiv \vec{f}^{-1}(u,v) \simeq \underbrace{\vec{f}^{-1}(-3,1)}_{=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u+3 \\ v-1 \end{pmatrix}$$

a orden lineal

- <u>Fórmula de Taylor</u>

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^k en $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, se llama polinomio de Taylor de orden k de f en $\vec{a}$ al polinomio

$$P_k(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(\vec{a})(x_i - a_i) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij} f(\vec{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots$$

$$+ \frac{1}{k!}\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} D_{i_1 \cdots i_k} f(\vec{a})(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}),$$

y se llama resto de Taylor a $R_k(\vec{x}) = f(\vec{x}) - P_k(\vec{x})$.

• <u>Nota</u>: Cuando $k=2$, se puede escribir

$$P_2(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x}-\vec{a}) +$$
$$+ \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^T Hf(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a}),$$

donde $\vec{x}^T Hf(\vec{a})\vec{x}$ es la forma cuadrática asociada a la matriz Hessiana.

Si además $n=2$,

$$\vec{x}^T Hf(\vec{x})\vec{x} = \partial_x^2 f(\vec{a})x^2 + \partial_y^2 f(\vec{a})y^2 + 2\partial_{xy} f(\vec{a})xy$$

• <u>Teorema</u>: (de Taylor)

Si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^k en $\vec{a}$, entonces

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{R_k(\vec{x})}{\|\vec{x}-\vec{a}\|^k} = 0.$$

Clase 18: Optimización sin restricciones.

Dada $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

¿ máx / mín. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $(x_1, \dots, x_n) \in A$?

Es decir, queremos optimizar la "función objetivo" $f(x_1, \dots, x_n)$ en la "región factible" A.

- **Def.** Máx./mín. absoluto (o global)

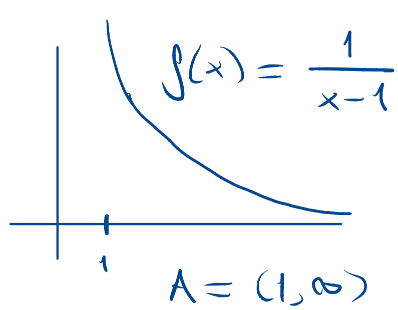
Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que f tiene un

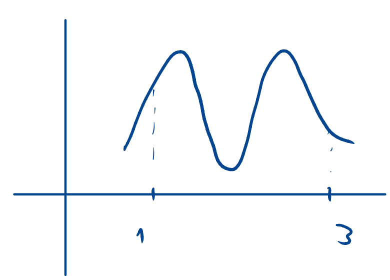
1) máximo absoluto en $\vec{x}_0 \in A$ si $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})$ $\forall \vec{x} \in A$.

2) mínimo " " " " $f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})$ $\forall \vec{x} \in A$.

Nota: Una función puede no tener máx./mín. global en A, y puede también tener varios.

Ej:





En el caso particular de regiones factibles compactas, es decir, cerradas y acotadas, recordamos la condición suficiente de Weierstrass:

• <u>Teorema</u>: (de Weierstrass)

$$\left.\begin{array}{l} D \subseteq \mathbb{R}^n \text{ compacto} \\ f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ continua} \end{array}\right\} \longrightarrow$$ f alcanza el máximo y mínimo absoluto en D,

i.e. $\exists\, \vec{x}_m, \vec{x}_M \in D \,/$

$$f(\vec{x}_m) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_M) \quad \forall \vec{x} \in D.$$

• <u>Def</u>: Extremos relativos (o locales)

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que un punto (no aislado) $\vec{x}_0 \in D$ es

1) un máximo (mínimo) relativo de f si existe un entorno I de $\vec{x}_0$ /

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0) \quad \forall \vec{x} \in D \cap I.$$
$$(f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}))$$

→ Si la desigualdad es estricta para $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ se dice que el extremo es estricto.

<u>Nota</u>: Salvo puntos aislados, los extremos globales son también relativos. Entonces, la estrategia es

buscar los extremos relativos y luego escoger de entre ellos los absolutos.

• **Teorema**: Condición necesaria de extremo relativo

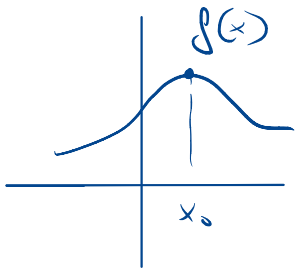
Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D abierto, $\vec{x}_0 \in D$.

Si $\vec{x}_0$ es extremo relativo de f y existe $D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0)$ $\left.\right\}$ entonces $\Longrightarrow$ $D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = 0$.

• **Corolario**: Si f es diferenciable en $\vec{x}_0$, entonces

[T^{a} de Fermat] $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$.

• **Idea**: (Caso de máx. local)



$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Si x_0 es máx. local: $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ $\Bigg|$ si $\exists f'(x_0)$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow f'(x_0) = 0$.

• La misma idea aplica para

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

//

Nota: Si f es diferenciable, existen todas las derivadas direccionales y

$$D_{\vec{u}} f(\vec{x}_0) = \vec{u} \cdot \nabla f(\vec{x}_0).$$

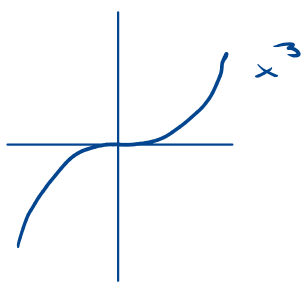
Luego, en particular, si $\vec{x}_0$ extremo relativo,

$$\partial_x f(\vec{x}_0) = 0 = \partial_y f(\vec{x}_0) \longrightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = 0.$$

→ **Nota:** La condición anterior no es suficiente,

$$f(x) = x^3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2,\ f'(0) = 0 \quad \text{pero } x_0 = 0$$

no es un extremo relativo.



(es punto de inflexión)

• **Def:** Puntos críticos

Dada $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x}_0 \in D$, se dice que $\vec{x}_0$ es punto crítico de f si $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$.

→ Tenemos entonces que si f diferenciable en $\vec{x}_0$, para que $\vec{x}_0$ sea extremo relativo es condición necesaria que sea un punto crítico.

→ No es condición suficiente: puede ser un "punto de silla", generalización de punto de inflexión.

· **Def:** Punto de silla

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que $\vec{x}_0 \in D$ es punto de silla de f si

1) es punto crítico, i.e., $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$,

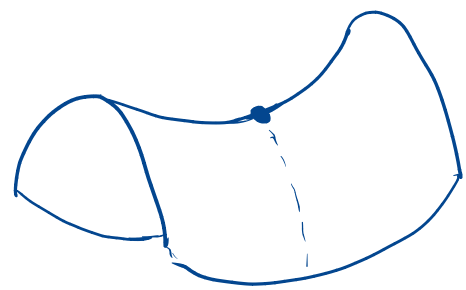
2) en todo entorno de $\vec{x}_0$ podemos encontrar $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ /

$$f(\vec{x}_1) > f(\vec{x}_0) \quad , \quad f(\vec{x}_2) < f(\vec{x}_0)$$

Ejemplo: $f(x,y) = x^2 - y^2$ tiene punto de silla en $(0,0)$.

↳ $\nabla f(x,y) = (2x, -2y) \to \nabla f(0,0) = (0,0)$

$\forall \varepsilon > 0$, $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0$
$f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0$



• ¿Si $\vec{x}_0$ punto crítico, cómo saber si es extremo relativo?

Para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f'(x_0) = 0$, estudiamos $f''(x_0)$:

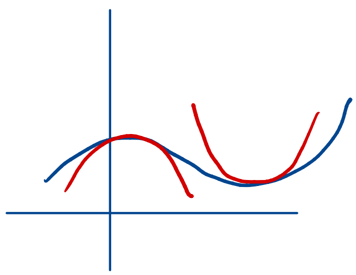
si $f''(x_0) > 0 \to$ mín. relativo
$f''(x_0) < 0 \to$ máx. relativo.
$f''(x_0) = 0 \to$ no se concluye nada.

¿De dónde surge este criterio?

↳ Cerca de x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{f''(x_0)}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2).$$

su signo nos dice qué "tipo de parábola" es



- Buscamos un criterio análogo para $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Si $f \in C^2(D)$, $\vec{x}_0 \in D$, tenemos

$$f(\vec{x}) \simeq f(\vec{x}_0) + \underbrace{\nabla f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{=0} + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_0)^T Hf(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

$$\Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \simeq \frac{1}{2}\underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_0)^T Hf(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{\text{signo?}}.$$

Tenemos el siguiente criterio para estudiar el signo de formas cuadráticas $\vec{x}^T M \vec{x}$: