

Clase 19: Condición suficiente de extremo relativo.

- Def. - Criterio: Sea $M \in M_{n \times n}$ una matriz simétrica.
Entonces,

1) M es definida positiva si $\vec{x}^T M \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$
 $\Leftrightarrow$ todos sus autovalores son positivos

2) M es def. negativa si $\vec{x}^T M \vec{x} < 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$
 $\Leftrightarrow$ todos sus autovalores son negativos

3) M es semidefinida positiva si $\vec{x}^T M \vec{x} \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
(negativa) ($\leq$)

4) M es indefinida si $\vec{x}^T M \vec{x}$ cambia de signo según $\vec{x}$
 $\Leftrightarrow$ tiene autovalores positivos y negativos.

- Teorema: Condición suficiente de extremo relativo.

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dos veces diferenciable en $\vec{x}_0 \in D$.

Definimos $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T Hf(\vec{x}_0)\vec{x}$. Entonces,

- 1) $\vec{x}_0$ es mín. relativo (estricto) si $Q(\vec{x}) > 0$,
- 2) " " máx. " " " " $Q(\vec{x}) < 0$,
- 3) " " punto de silla si $Q(\vec{x})$ cambia de signo.

Nota: Si $H_f(\vec{x}_0)$ tiene algún autovector nulo (o, equivalentemente, si $\det(H_f(\vec{x}_0)) = 0$), no concluimos nada.

• Proposición: [Criterio de los menores]

Sea $A \in M_{n \times n}$ simétrica, $\text{rango}(A) = r$, y $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$.

Sean D_i los menores principales de A , $i = 1, \dots, n$.

Se tiene que:

1) Si $\det(A) \neq 0$, entonces $r = n$, A no es semidefinida, y

1.1) Si $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$, entonces A es definida pos.

1.2) Si $D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0$, entonces A es definida neg.

1.3) A es indefinida si no se cumplen 1.1) ni 1.2).

2) Si $\det(A) = 0$, entonces $r < n$, A no es definida, y

2.1) Si $D_i \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, r$, entonces

2.1.1) A es semidef. pos. si $D_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, r$.

2.1.2) A es semidef. neg. si $(-1)^i D_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, r$.

2.1.3) A es indefinida si no 2.1.1), 2.1.2).

2.2) Si $\exists i: 1 \leq i \leq r$ con $D_i = 0$, no se deduce nada.

• Criterio: (caso $n=2$)

Sea $f: A \subset \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}$, $f \in C^2(A)$, $(x_0, y_0) \in A$ punto crítico de f . Entonces:

- 1) $\det |Hf(x_0, y_0)| > 0$, $d_x^2 f(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es mín. relativo estricto.
- 2) $\det |Hf(x_0, y_0)| > 0$, $d_x^2 f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow$ máx.
- 3) $\det |Hf(x_0, y_0)| < 0 \Rightarrow$ punto de silla
- 4) $\det |Hf(x_0, y_0)| = 0 \Rightarrow$ No se concluye nada.

• Ejemplo: Calcular los extremos relativos de

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$$

Sol: $f \in C^\infty(\mathbb{D}^2)$

Puntos críticos: $\nabla f(x, y) = (0, 0)$

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 3y, 3y^2 + 3x) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ y^2 + x = 0 \end{cases}$$

Resolvamos: $x^2 + y = 0 \begin{cases} \rightarrow (-y^2)^2 + y = 0 \\ x = -y^2 \end{cases} \Rightarrow x = -y^2$

$\Rightarrow y(y^3 + 1) = 0 \begin{cases} y = 0 \Rightarrow (0, 0) \\ y = -1 \Rightarrow (-1, -1) \end{cases}$
 $x = -y^2$

Puntos críticos: $(0, 0)$, $(-1, -1)$.

Matriz Hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_x^2 f(x, y) & \partial_{xy} f(x, y) \\ \partial_{xy} f(x, y) & \partial_y^2 f(x, y) \end{bmatrix}$$

$\partial_x^2 f(x, y) = 6x$, $\partial_{xy} f(x, y) = 3$, $\partial_y^2 f(x, y) = 6y$

$Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(Hf(0, 0)) = -9 < 0 \Rightarrow$ Pto de silla.

$Hf(-1, -1) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$, $\det(Hf(-1, -1)) = 27 > 0 \Rightarrow$
 $\rightarrow (-1, -1)$ es máx. rel.

- Ejercicio: Calcular los extremos relativos de $f(x, y) = x^4 - 2px^2 - y^2 + 3$ en función del parámetro $p \in \mathbb{R}$.

Sol:

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 - 4px, -2y) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x^2 - p) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{p} \end{cases}$$

Caso 1: $p > 0 \rightarrow$ Puntos críticos $(0, 0)$, $(\sqrt{p}, 0)$, $(-\sqrt{p}, 0)$

Caso 2: $p = 0 \rightarrow$ Pto crítico $(0, 0)$

Caso 3: $p < 0 \rightarrow$ " " "

Matriz Hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4p & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

• $p > 0$:

$$Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} -4p & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Definida negativa}$$

$$Hf(\sqrt{p}, 0) = \begin{bmatrix} 8p & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Indefinida}$$

$$Hf(-\sqrt{p}, 0) = \begin{bmatrix} 8p & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Indefinida}$$

Por tto, si $p > 0$, $(0, 0)$ es máx. relativo,
 $(\pm\sqrt{p}, 0)$ son puntos de silla.

$$\bullet p < 0: Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -4p & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Indefinida} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Si $p < 0$, $(0,0)$ es punto de silla.

$$\bullet p = 0: Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Semidefinida negativa}$$

$\Rightarrow$ No concluimos nada.

Vemos:

$$f(x,y) = x^4 - y^2 + 3 \quad \text{cuando } p = 0.$$

Vemos que cerca del $(0,0)$ hay puntos donde $f(x,y)$ está por encima y en otros por debajo de $f(0,0)$:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon, 0) &= \varepsilon^4 + 3 > 3 = f(0,0) \\ f(0, \varepsilon) &= -\varepsilon^2 + 3 < 3 = f(0,0) \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow (0,0) \text{ es punto de silla.} \right.$$

Clase 20: Ejercicios

Ejercicio: 48

Ecuación: $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 6z - z^2 = 0$,

y $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{P}^3$ punto que la verifica.

a) Probar que $\exists z = z(x, y)$.

b) $\partial_x z, \partial_y z, \partial_x^2 z, \partial_y^2 z, \partial_{xy} z$

c) Puntos críticos de z , extremos relativos.

Sol:

a) $F(x, y, z) = x^2 - 4x + y^2 - 2y + 6z - z^2$.

• $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

• $F \in C^\infty$

• $\partial_z F(x_0, y_0, z_0) = 6 - 2z_0 \neq 0$ si $z_0 \neq 3$.

(*)

Podemos ver que $z_0 \neq 3$:

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + 6z - z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - (z-3)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-3)^2 = 4 + (x-2)^2 + (y-1)^2$$

Luego ningún (x_0, y_0, z_0) con $z_0 = 3$ puede verificar la ecuación.

Así, (*) garantiza por el TFI que $z = z(x, y)$ en un entorno de (x_0, y_0, z_0) .

$$b) \quad \partial_x z(x, y) = - \frac{\partial_x F(x, y, z(x, y))}{\partial_z F(x, y, z(x, y))} = - \frac{2x - 4}{6 - 2z(x, y)} = - \frac{x - 2}{3 - z}$$

$$\partial_y z(x, y) = - \frac{2y - 2}{6 - 2z(x, y)} = - \frac{y - 1}{3 - z}$$

$$\partial_x^2 z = \partial_x (\partial_x z) = - \partial_x \left(\frac{x - 2}{3 - z} \right) =$$

$$= - \frac{1}{3 - z} + \frac{x - 2}{(3 - z)^2} (-2z_x) =$$

$$= - \frac{1}{3 - z} + \frac{x - 2}{(3 - z)^2} \frac{x - 2}{3 - z} =$$

$$= - \frac{(3 - z)^2 - (x - 2)^2}{(3 - z)^3}$$

$$\overline{\Pi} \text{ También: } x^2 - 4x + y^2 - 2y + 6z - z^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 4 + 6z_x - 2zz_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 6z_{xx} - 2z_x^2 - 2z z_{xx} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2_{xx} = - \frac{2 - 2z_x^2}{6 - 2z} = - \frac{2 - 2 \frac{(2x - 4)^2}{(6 - 2z)^2}}{6 - 2z} =$$

$$= - \frac{2(6 - 2z)^2 - 2(2x - 4)^2}{(6 - 2z)^3}$$

$$d_y^2 z: 2y - 2 + 6zy - 2yz_y = 0 \Rightarrow 2 + 6zy - 2z_y^2 - 2yz_y = 0$$

$$\Rightarrow z_y = - \frac{2 - 2z_y^2}{6 - 2z} = - \frac{2 - 2 \frac{(2y-2)^2}{(6-2z)^2}}{6 - 2z} =$$

$$= - \frac{2(6-2z)^2 - 2(2y-2)^2}{(6-2z)^3} = - \frac{(3-z)^2 - (y-1)^2}{(3-z)^3}$$

$$d_{xy}^2 z = d_y d_x z = \frac{x-2}{3-z} (-z_y) = \frac{(x-2)}{(3-z)^2} \cdot \frac{(y-1)}{(3-z)} =$$

$$= \frac{(x-2)(y-1)}{(3-z)^3}$$

c) Punto crítico:

$$\nabla z(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_x z = - \frac{x-2}{3-z} = 0 \Leftrightarrow x=2 \\ d_y z = - \frac{y-1}{3-z} = 0 \Leftrightarrow y=1 \end{cases} \quad (2,1)$$

En $x=2, y=1$, el valor $z(2,1)$ lo despejamos:

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + 6z - z^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 - 1 + 6z - z^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 6z + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = 3 \pm 2 \quad \begin{cases} z=5 \\ z=1 \end{cases}$$

Nota: en un entorno de $(2, 1, 1)$ existe una función $z = h(x, y)$, y en un entorno de $(2, 1, 5)$ otra $z = g(x, y)$.

Estudiamos si son extremos relativos.

$$H_z(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{(3-z)^2 - (x-2)^2}{(3-z)^3} & \frac{(x-2)(y-1)}{(3-z)^3} \\ \frac{(x-2)(y-1)}{(3-z)^3} & -\frac{(3-z)^2 - (y-1)^2}{(3-z)^3} \end{bmatrix}$$

• Punto $(2, 1, 1)$

$$Hh(2, 1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Def. negative} \rightarrow (2, 1, 1) \text{ es un m\acute{e}x. relativo (estricto)}$$

• Punto $(2, 1, 5)$

$$Hg(2, 1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Def. positive} \rightarrow (2, 1, 5) \text{ es un m\acute{e}n. relativo.}$$

• Ejercicio: 47

Superficie $(y+z)^2 + (z-x)^2 = 16$.

a) ¿Puntos (x_0, y_0, z_0) / normal paralela a plano yz ?

b) Plano tangente en $(1, 3, 1)$.

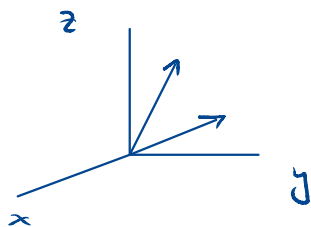
Sol:

Superficie $F(x, y, z) = (y+z)^2 + (z-x)^2 - 16 = 0$.
de nivel

Vector normal:

$$\nabla F(x, y, z) = (-2(z-x), 2(y+z), 2(y+z) + 2(z-x))$$

Paralelo a plano $yz \Leftrightarrow$ Perpendicular a eje ox



$$\text{Condición: } \nabla F(x, y, z) \cdot \vec{e}_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(z-x) = 0$$

Es decir, los puntos (x_0, y_0, z_0) tales que

$$x_0 = z_0 \text{ y } F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Esto es: $F(x_0, y_0, x_0) = (y_0 + x_0)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_0 + y_0 = \pm 4 \Leftrightarrow y_0 = -x_0 \pm 4.$$

Esto es, los puntos

$$(x_0, y_0, z_0) = (x_0, -x_0 \pm 4, x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

Esto son dos rectas paralelas:

$$(x(t), y(t), z(t)) = (0, 4, 0) + (1, -1, 1)t,$$

$$(x(t), y(t), z(t)) = (0, -4, 0) + (1, -1, 1)t.$$

b) Plano definido por el vector normal y un punto:

$$\nabla F(1, 3, 1) = (0, 2, 2)$$

$$\text{Plano: } (x-1, y-3, z-1) \cdot (0, 1, 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-3 + z-1 = 0 \rightarrow z + y - 4 = 0.$$

• Ejercicio: Decidir si z_0 es extremo relativo usando la definición:

a) $f(x, y) = (x+y+1)(x-y+1)$, $(x_0, y_0) = (-1, 0)$

$$b) f(x, y) = x^2 + xy + y^2, \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

Sol:

$$a) (\tilde{x}, \tilde{y}) = (-1 + \varepsilon_x, \varepsilon_y) :$$

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}, \tilde{y}) &= (-1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + 1)(-1 + \varepsilon_x - \varepsilon_y + 1) = \\ &= (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(\varepsilon_x - \varepsilon_y) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \varepsilon_x = 2\varepsilon_y : f(\tilde{x}, \tilde{y}) &= 3\varepsilon_y^2 > 0 = f(-1, 0) , \\ \text{Si } \varepsilon_y = 2\varepsilon_x : f(\tilde{x}, \tilde{y}) &= -3\varepsilon_x^2 < 0 = f(-1, 0) \end{aligned} \quad \left\{ \rightarrow \right.$$

$\Rightarrow (0, 0)$ es punto de silla.

$$\begin{aligned} b) f(x, y) &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x + y)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Para } \forall \varepsilon > 0, \quad f(x, y) > 0 = f(0, 0) \quad \forall (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (0, 0)$ es mín. relativo

Clase 21: Multiplicadores de Lagrange.

Queremos estudiar ahora problemas de optimización con restricciones.

Ejemplo: Hallar rectángulos de área máxima con perímetro L .

Sol: Sean x, y los lados del rectángulo.

$$\text{¿ máx } A(x, y) = x \cdot y \quad ?$$

$$\text{sujeto a } 2x + 2y = L$$

En este caso, podemos reducirlo a un problema de una variable:

$$2x + 2y = L \rightarrow y = \frac{L}{2} - x \rightarrow \tilde{A}(x) = x \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right) \rightarrow \text{máx } \tilde{A}(x)?$$

$$\tilde{A}'(x) = \frac{L}{2} - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{L}{4}, \text{ luego } y = \frac{L}{4}.$$

Es decir, el cuadrado.

- En general, tendremos una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y unas restricciones dadas por la "ecuaciones de ligadura": $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$ con $\vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- Def.: Sean $f, g_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D abierto,
 $i = 1, 2, \dots, m < n$.

Se llaman extremos de f condicionados por $\{g_i\}_{i=1, \dots, m}$ a los extremos de f que cumplen las ecuaciones de ligadura $g_i(\vec{x}) = 0, i = 1, \dots, m$.

En particular, si $M = \{\vec{x} \in D : g_i(\vec{x}) = 0, i = 1, \dots, m\}$, se dice que

- $\vec{x}_0 \in M$ es máx. (mín.) absoluto condicionado si

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in M, \\ (\leq)$$

- $\vec{x}_0 \in M$ es máx. (mín.) relativo condicionado si

$$\exists \varepsilon > 0 / f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in M \cap B_\varepsilon(\vec{x}_0). \\ (\leq)$$

- Método de reducción: $\max. / \min. \quad f(\vec{x})$
s.a. $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$

con $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m < n$ ecuaciones de ligadura).

Consiste en usar las m ecuaciones de ligadura para despejar m variables en función de las

otras $n-m$, usando por ejemplo el Teorema de la función implícita (si es aplicable).

Resulta entonces que el problema de optimización con restricciones se transforma en otro sin restricciones con $n-m$ variables.

- Ejemplo: Escribir el número 15 como suma de tres números no negativos tales que su producto es máximo.

Sol:

$$\left. \begin{array}{l} \text{máx. } f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \\ \text{s.a. } g(x, y, z) = x + y + z - 15 = 0 \\ x, y, z \geq 0 \end{array} \right\}$$

Despejamos $z = h(x, y) = 15 - x - y \rightarrow$

$$\rightarrow L(x, y) = f(x, y, h(x, y)) = xy(15 - x - y)$$

Maximizamos $L(x, y)$:

$$\nabla L(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y(15 - x - y) - xy = 0 \\ x(15 - x - y) - xy = 0 \end{array} \right\} \leftarrow$$

$$\leftarrow \left\{ \begin{array}{l} y(15 - 2x - y) = 0 \\ x(15 - x - 2y) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} y=0 \\ x(15-x-2y)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0, x=0 \\ y=0, x=15 \end{cases}$$

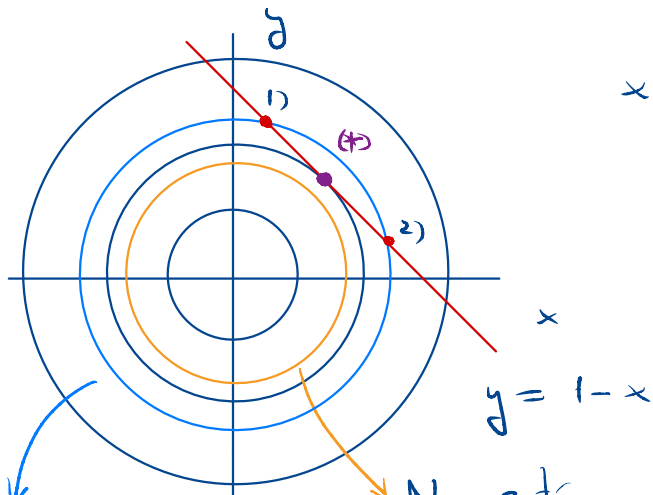
$$\textcircled{2} \begin{cases} 15-2x-y=0 \\ x(15-x-2y)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0, y=15 \\ 15-x-2y=0 \\ 15-2x-y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=5$$

El producto es máximo cuando $x=y=z=5$.

• Método de los multiplicadores de Lagrange:

Ejemplo: $\min. f(x,y) = x^2 + y^2$
s.a. $g(x,y) = x + y - 1 = 0$

Representamos las curvas de nivel de f :



El valor de f
en 1), 2) es
mayor que (*)

No está en la
región factible.

En el extremo condicionado, las curvas de nivel tocan tangencialmente a la curva de ligadura $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Los vectores normales son paralelos $\Rightarrow$

$$\nabla f \sim \nabla g$$

$\Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Teorema: (Condición necesaria de extremo condicionado)

Sean $f, g_i: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, m$ ($m < n$) de clase C^1 en D , D abierto.

Si

- 1) $\bar{x}_0$ es extremo relativo de f condicionado a $\{g_i\}$,
- 2) los vectores $\nabla g_1(\bar{x}_0), \dots, \nabla g_m(\bar{x}_0)$ son lin. indep.

entonces $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} /$

$$\nabla f(\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}_0) = \vec{0}.$$

Nota: Los λ_i se llaman multiplicadores de Lagrange.

Nota: Entonces, los extremos condicionados deben cumplir

$$\left. \begin{aligned} \nabla f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\vec{x}_0) &= \vec{0} \\ g_1(\vec{x}_0) &= 0 \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}_0) &= 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

Notamos que si consideramos $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ como variables, podemos escribir

$$\nabla_{\vec{\lambda}} \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}_0) \end{pmatrix}.$$

luego, definiendo la función lagrangiana

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\vec{x}),$$

el sistema (*) puede escribirse como

$$\nabla_{\vec{x}, \vec{\lambda}} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \vec{0}$$

- Resumen - método: $\max./\min. f(\vec{x}) \begin{cases} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{s.e. } \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0} \end{cases} \begin{cases} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \end{cases}$

1) Definir $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\vec{x})$

2) Resolver el sistema (no lineal) de $n+m$ ecuaciones con $n+m$ incógnitas: $\nabla_{\vec{x}, \vec{\lambda}} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \vec{0}$,

$$\left. \begin{array}{l} dx_1 f + \sum_{i=1}^m \lambda_i dx_1 g_i = 0 \\ \vdots \\ dx_n f + \sum_{i=1}^m \lambda_i dx_n g_i = 0 \\ g_1(\vec{x}) = 0 \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) = 0 \end{array} \right\} \leadsto \begin{array}{l} x_1, \dots, x_n \\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \end{array}$$

Clase 22: Ejercicios.

- Ejemplo 1: Extremos absolutos de $f(x, y) = x + 2y$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$.

sol:

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda x \\ 2 + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\lambda=0 \\ 2+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2x} \\ \lambda = -\frac{1}{y} \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2x} \\ y=2x \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2x} \\ y=2x \\ x^2+4x^2=5 \end{cases} \begin{cases} \xrightarrow{\quad} \lambda = +\frac{1}{2} \\ \xrightarrow{\quad} y = \pm 2 \\ \xrightarrow{\quad} x^2 = \pm 1 \end{cases}$$

Es decir, puntos críticos $(1, 2), (-1, -2)$.

Como el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\}$ es compacto y f es continua en D , por el T^o de Weierstrass f alcanza máx./mín. absoluta en D .

$$f(1, 2) = 5, \quad f(-1, -2) = -5$$

$\uparrow$
máx. abs.

$\uparrow$
mín. abs.

- Ejemplo 2: Extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y - z^2$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Sol.

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y - z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\nabla L(x, y, z, \lambda) = \begin{bmatrix} 2x + 2\lambda x \\ 1 + 2\lambda y \\ -2z + 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1+\lambda) = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ 2z(-1+\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} x=0 \text{ ①} \\ \lambda = -1 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{① } x=0 \begin{cases} 1 + 2\lambda y = 0 \\ 2z(-1+\lambda) = 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} z=0 \text{ ①.1} \\ \lambda = 1 \text{ ①.2} \end{cases}$$

$$\text{①.1 } x=0, z=0 \begin{cases} 1 + 2\lambda y = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} \rightarrow \lambda = \frac{-1}{2y} = \mp \frac{1}{2} \\ \rightarrow y = \pm 1 \end{cases}$$

$$(0, 1, 0), (0, -1, 0)$$

$$\text{①.2 } x=0, \lambda=1 \begin{cases} 1 + 2y = 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} \rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ \rightarrow z^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow (0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \rightarrow (0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{matrix}$$

$$\textcircled{2} \quad \lambda = -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2y = 0 \\ -4z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = -1, \\ z = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{3}{4} \end{array} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \text{ and } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

Como la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es un conjunto compacto, basta evaluar en los puntos críticos:

$$f(0, 1, 0) = 1, \quad f(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{5}{4},$$

$$f(0, -1, 0) = -1, \quad f(0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{5}{4},$$

$$f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0) = \frac{5}{4} = f(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

$\Rightarrow$ Máx. absoluta en $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ con valor $\frac{5}{4}$,

mín. abs. en $(0, \pm \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ con valor $-\frac{5}{4}$.

- Ejemplo 3: Calcular la distancia del origen a la superficie dada por $z^2 = xy + 1$.

Sol: Distancia de (x, y, z) al origen:

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Por comodidad en los cálculos, notamos que Γ es monótona creciente, luego alcanza sus máx./mín. en los mismos puntos que su cuadrado.

$$\overline{f}(x) = \sqrt{g(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0$$

$$F(x) = g(x) \rightarrow F'(x) = g'(x) = 0$$

⌋

$$\begin{cases} \min f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.t. } g(x, y, z) = z^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$$

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z^2 - xy - 1)$$

$$\nabla L(x, y, z, \lambda) = \begin{bmatrix} 2x - \lambda y \\ 2y - \lambda x \\ 2z + 2\lambda z \\ z^2 - xy - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{cases} z = 0 \text{ ①} \\ \lambda = -1 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{① } z = 0 \quad \begin{cases} 2x - \lambda y = 0 \\ 2y - \lambda x = 0 \\ -xy - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \lambda = 2 \frac{x}{y} \\ \lambda = 2 \frac{y}{x} \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \lambda = 2 \frac{x}{y} \\ \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z=0 \\ \Leftrightarrow \lambda = 2 \frac{x}{y} \left\{ \begin{array}{l} x^2 = y^2 \\ xy = -1 \end{array} \right. & \rightarrow \begin{array}{l} x = \pm y \\ xy = -1 \end{array} \end{aligned}$$

$\textcircled{1.1} \quad \begin{array}{l} x=y \\ y^2 = -1 \end{array} \quad \text{no}$
 $\textcircled{1.2} \quad \begin{array}{l} x=-y \\ -y^2 = -1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = \pm 1 \\ x = \mp 1 \end{array}$

Esto es, $(1, -1, 0), (-1, 1, 0)$

$$\textcircled{2} \quad \lambda = -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \\ z^2 = 1 + xy \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ z^2 = 1 + xy \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array} \Leftrightarrow (0, 0, 1), (0, 0, -1)$$

• Tenemos que

$$f(1, -1, 0) = 2, \quad f(0, 0, 1) = 1$$

$$f(-1, 1, 0) = 2, \quad f(0, 0, -1) = 1.$$

• Pero como el conjunto $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - xy - 1 = 0\}$

no es acotado, no podemos usar el T^{te} de Weierstrass.

• Vamos a probar que $(0, 0, \pm 1)$ son mínimos absolutos directamente:

$$f(0, 0, \pm 1) = 1 \rightarrow \text{¿ } f(x, y, z) \geq 1 \quad \forall (x, y, z) \in D?$$

In D , $z^2 = 1 + xy$, luego

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + 1 + xy \quad \text{si } (x, y, z) \in D.$$

$$\text{¿ } x^2 + y^2 + 1 + xy > 1 ?$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy > 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 = \\ &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

luego efectivamente,

$$f(x, y, z) > f(0, 0, \pm 1) = 1 \quad \forall (x, y, z) \in D //$$