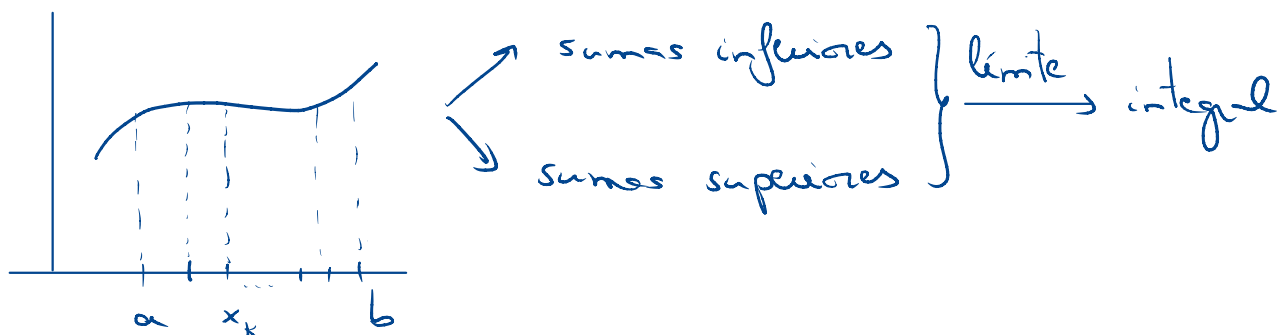


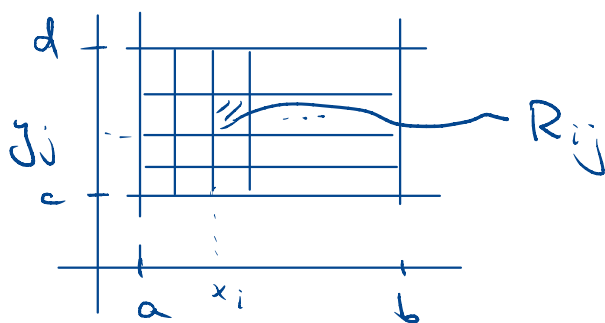
Clase 27: Integrales múltiples.

Integral de Riemann $\int_a^b f(x) dx$



En $\mathbb{R}^n$ se sigue el procedimiento análogo.

- Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, la integral sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ puede aproximarse realizando una partición,



y calculando la suma de los volúmenes de los prismas correspondientes,

suma inferior $\rightarrow$ altura $m_{ij} = \inf \{ f(x, y) : (x, y) \in R_{ij} \}$,

suma superior $\rightarrow$ altura $M_{ij} = \sup \{ f(x, y) : (x, y) \in R_{ij} \}$.

esto es,

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \text{Area}(R_{ij}),$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \text{Area}(R_{ij}).$$

- Cuando se cumple que

$$\sup_P I(f, P) = \inf_P S(f, P),$$

se dice que f es integrable Riemann en R , y se llama integral de f en R a su valor

$$\iint_R f(x, y) dx dy.$$

- Note: En $\mathbb{R}^3$ hablamos de integrales triples, y se denota,

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz,$$

- Note: Se cumplen las mismas propiedades que en una variable,

1) Linealidad: $\iint_R \lambda(f + g) dx dy = \lambda \iint_R f dx dy + \lambda \iint_R g dx dy$

2) Acotación: si $m \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in R$, entonces

$$m \cdot \text{Área}(R) \leq \iint_R f(x, y) dx dy \leq M \cdot \text{Área}(R).$$

3) Monotonía: $f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_R f(x,y) dx dy \leq \iint_R g(x,y) dx dy$$

4) Valor absoluto: $\left| \iint_R f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_R |f(x,y)| dx dy$

• ¿Cómo obtener el valor de la integral $\iint_R f(x,y) dx dy$?

• Teorema: (de Fubini)

Sea $R = [a,b] \times [c,d]$, $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ integrable.

Si para cada $y \in [c,d]$ existe la integral de Riemann (unidimensional) $A(y) = \int_a^b f(x,y) dx$,

entonces también existe $\int_c^d A(y) dy$ y se cumple que

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy.$$

• Teorema: (de Fubini)

Sea $R = [a,b] \times [c,d]$, $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces

1) f es integrable Riemann,

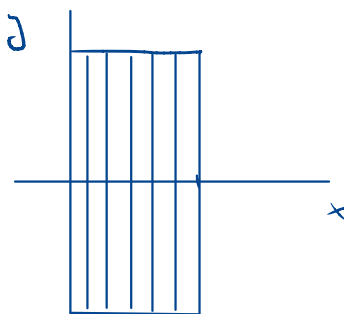
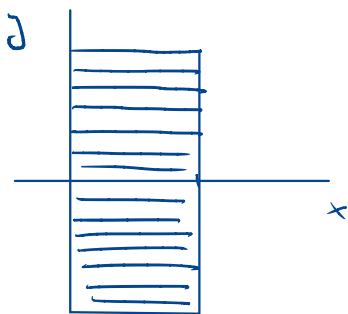
2) la integral coincide con las integrales iteradas,

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx.$$

Ejemplo: $R = [0,1] \times [-1,1]$

$$\begin{aligned} 1) \iint_R x e^y dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 x e^y dx \right) dy = \int_{-1}^1 e^y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 dy = \\ &= \int_{-1}^1 e^y \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} e^y \Big|_{-1}^1 = \frac{e - e^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \iint_R x e^y dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 x e^y dy \right) dx = \int_0^1 x \left[e^y \right]_{-1}^1 dx = \\ &= \int_0^1 x (e - e^{-1}) dx = \frac{e - e^{-1}}{2}. \end{aligned}$$



- Nota: Hemos definido integrales dobles sobre rectángulos, y con Fubini podemos calcularlas mediante integrales en una variable.

Conceptualmente, podemos integrar en una región cualquiera acotada cualquiera:

Dado $D \subset \mathbb{R}^2$ y f , tomamos un rectángulo que contenga a D , y definimos

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

$$\text{Entonces, definimos } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy$$

→ Esto, sin embargo, no es útil para el cálculo exacto de integrales.

Nota: De la definición vemos que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y no negativa, entonces el volumen del sólido limitado por el grafo $z = f(x, y)$ en $\mathbb{R}$, es decir, el volumen del conjunto

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}, 0 \leq z \leq f(x, y) \}$$

viene dado por $\text{Vol}(A) = \iint_R f(x,y) dx dy$.

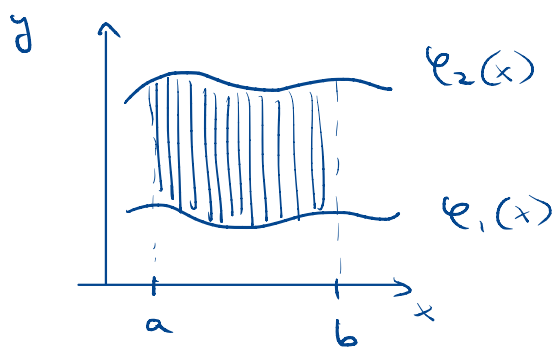
• Integrales dobles en recintos proyectables

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que:

1) A es x -proyectable si es de la forma

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

con $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \forall x \in [a,b]$.



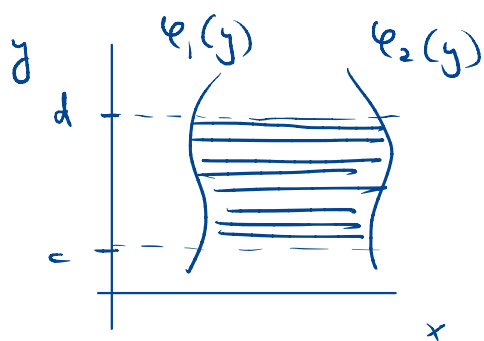
→ Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces f integrable en A y

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx.$$

2) A es y -proyectable si

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\},$$

donde $\varphi_1, \varphi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y) \forall y \in [c, d]$.



→ Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces f integrable en A y

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

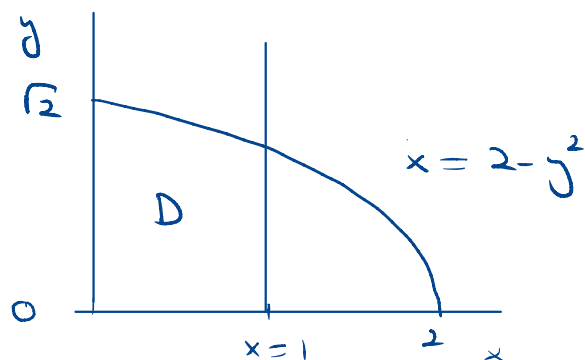
Clase 28: Ejercicios

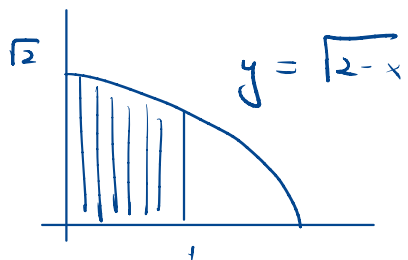
• Ejemplos:

1) $I = \iint_D \frac{y}{x+1} dx dy,$

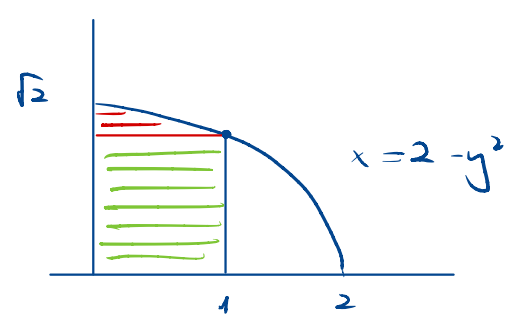
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y, x \leq 2 - y^2\}$$

Representamos la región:



- Opción 1: como x -proyectable, 

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{2-x}} \frac{y}{x+1} dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2-x}} dx = \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2-x}{1+x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{3}{1+x} - 1 \right) dx = \\
 &= \frac{3}{2} \log(2) - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

- Opción 2: como y -proyectable, 

Punto de corte:

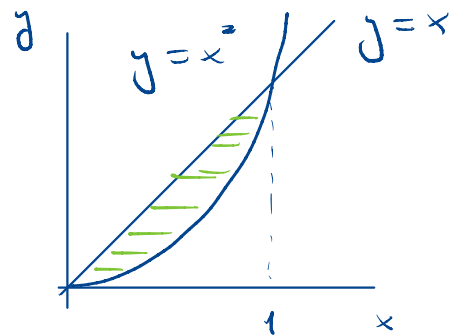
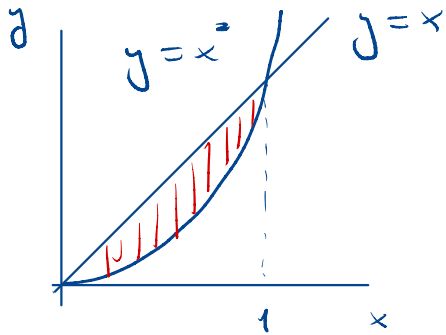
$$x = 1 \rightarrow y = 1$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{x+1} dx \right) dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2-y^2} \frac{y}{x+1} dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 y \left[\log(1+x) \right]_0^1 dy + \int_1^{\sqrt{2}} y \left[\log(1+x) \right]_0^{2-y^2} dy =$$

$$= \int_0^1 y \log(2) dy + \int_1^{\sqrt{2}} y \log(3-y^2) dy = \dots \text{ (per partes).}$$

$$2) I = \iint_D dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\}$$



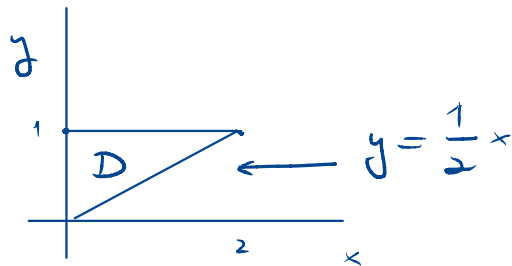
Como x -projectable:

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x dy \right) dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

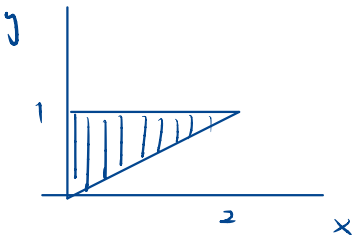
Como y -projectable: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq \sqrt{y}\}$

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} dx \right) dy = \int_0^1 (\sqrt{y} - y) dy = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

$$3) I = \iint_D e^{y^2} dx dy,$$

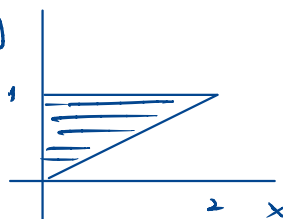


• Como x -projectable:



$$I = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^1 e^{y^2} dy \right) dx \quad \text{No podemos calcular} \\ \int e^{y^2} dy.$$

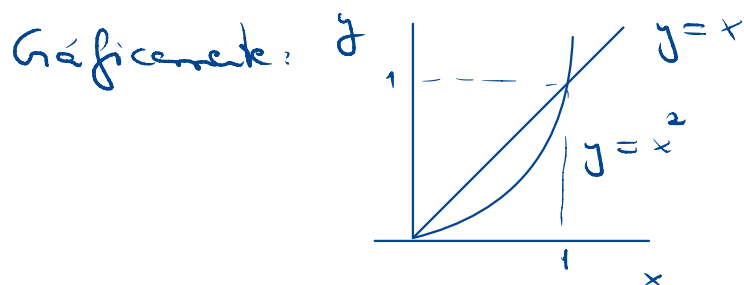
• Como y -proyectable:



$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2y} e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 e^{y^2} \left(\int_0^{2y} dx \right) dy = \\ = \int_0^1 2y e^{y^2} dy = \left[e^{y^2} \right]_0^1 = e - 1.$$

• Ejercicio: Escribir los conjuntos en sus formas x e y -proyectables.

$$1) M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x \}$$



$$x\text{-proj.} : M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, x^2 \leq y \leq x \}$$

$$y\text{-proj.} : M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, y \leq x \leq \sqrt{y} \}$$

Sin usar la gráfica:

$$x\text{-proj.: } x^2 < y < x \Rightarrow \begin{cases} x > x^2 \geq 0 \\ x^2 < x \Rightarrow x < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, x^2 < y < x\}$$

$$y\text{-proj.: } x^2 < y < x \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y < x < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < y < 1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x^2 < y \\ y < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \sqrt{y} \\ y < x \end{cases} \Rightarrow \Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, y < x < \sqrt{y}\}$$

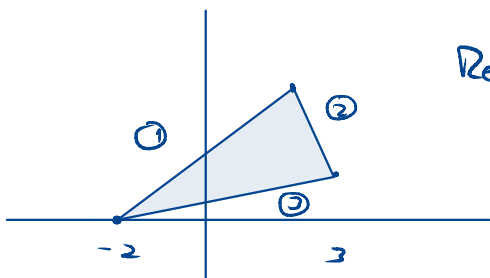
$$2) \Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\bullet \text{ } x\text{-proj.: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \\ y \geq 0 \\ y^2 \leq 4 - x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$$

$$\bullet \text{ } y\text{-proj.: análogo, } \Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\}$$

3) El triángulo de vértices $(-2, 0)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$

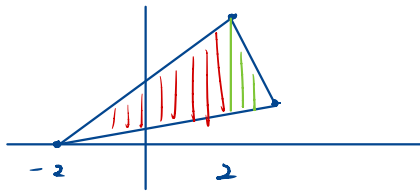


$$\text{Reda ①: } y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}y - 2$$

$$\text{② } y = -2x + 7 \Leftrightarrow x = \frac{-y}{2} - \frac{7}{2}$$

$$\text{③ } y = \frac{x}{5} + \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = 5y + 2$$

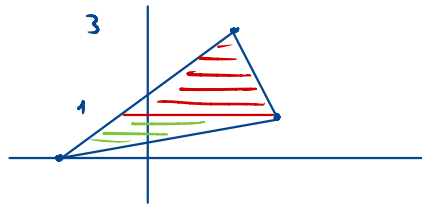
• x-project:



$$M = M_1 \cup M_2 \text{ con } M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{D}^2 : -2 \leq x \leq 2, \frac{x}{5} + \frac{2}{5} \leq y \leq \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}\}$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{D}^2 : 2 \leq x \leq 3, \frac{x}{5} + \frac{2}{5} \leq y \leq -2x + 7\}$$

• y-project:



$$M = M_1 \cup M_2 \text{ con}$$

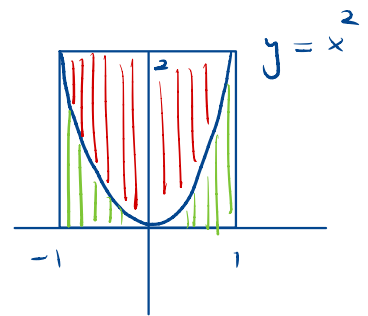
$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{D}^2 : 0 \leq y \leq 1, \frac{4}{3}y - 2 \leq x \leq 5y + 2\}$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{D}^2 : 1 \leq y \leq 3, \frac{4}{3}y - 2 \leq x \leq \frac{-y}{2} - \frac{7}{2}\}$$

• Ejercicio: Calcular $I = \iint_R \sqrt{|y - x^2|} dx dy$,

$$R = [-1, 1] \times [0, 2].$$

$$|y - x^2| = \begin{cases} y - x^2 & \text{si } y - x^2 \geq 0 \\ x^2 - y & \text{si } y - x^2 \leq 0 \end{cases}$$



$$I = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy \right) dx + \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \left[-\frac{(x^2 - y)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{x^2} dx + \int_{-1}^1 \left[\frac{(y - x^2)^{3/2}}{3/2} \right]_{x^2}^2 dx =$$

$$= + \underbrace{\frac{2}{3} \int_{-1}^1 x^3 dx}_{=0} + \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (2-x^2)^{3/2} dx = \frac{4}{3} \int_0^1 (2-x^2)^{3/2} dx =$$

$$\text{Let } x = \sqrt{2} \sin(t) \rightarrow dx = \sqrt{2} \cos(t) dt, \quad x=1 \rightarrow \sin(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$x=0 \rightarrow t=0$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/4} 2^{3/2} \cos^3(t) 2^{1/2} \cos(t) dt = \frac{16}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^4(t) dt =$$

$$= \frac{16}{3} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right)^2 dt = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/4} (1 + \cos^2(2t) + 2\cos(2t)) dt =$$

$$= \frac{4}{3} \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos(4t)}{2} dt + \left[\sin(2t) \right]_0^{\pi/4} \cdot \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin(4t)}{4} \right]_0^{\pi/4} \right) + \frac{4}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$$

Classes 29, 30: Primer Examen Parcial