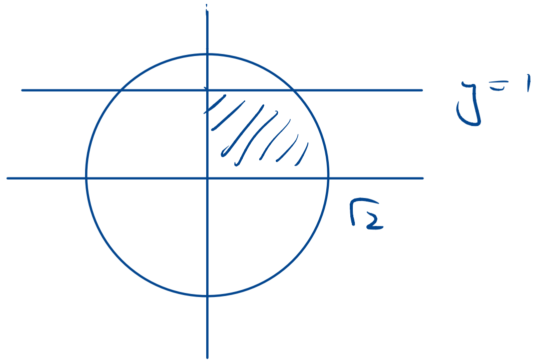
# $\boxed{\text{Clase 35}}$: Ejercicios. Curvas.

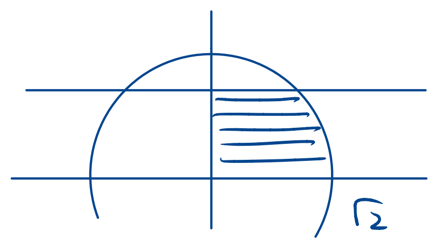
$\boxed{7}$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ x \geq 0\}$




$$A = \iint_A dx\,dy$$

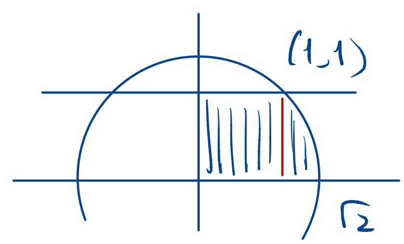
- <u>y-proyectable</u>: $0 \leq y \leq 1 \rightarrow x \geq 0,\ x \leq \sqrt{2-y^2}$

$$A = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{2-y^2}} dx \right) dy$$




- <u>x-proyectable</u>: dividimos en dos,

$$A = \int_0^1 \left( \int_0^1 dy \right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left( \int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \right) dx$$




También podemos hacerlo sin el dibujo:

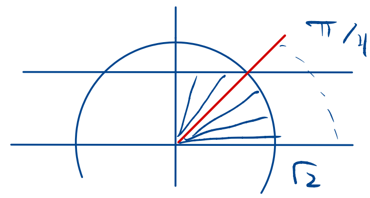
$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 2 \end{array}\right\} \rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{2},\quad \left.\begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq \sqrt{2-x^2} \end{array}\right\} \rightarrow 0 \leq y \leq \min\{1, \sqrt{2-x^2}\}.$$

Punto de cambio: $1 = \sqrt{2-x^2} \rightarrow x^2 = 1 \underset{(x \geq 0)}{\longrightarrow} x = 1$.

En polares: $A = \{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq r \cdot \sin\theta \leq 1,\ \cos\theta \geq 0 \}$

- <u>$\theta$-proyectable:</u>

$$A = \int_0^{\pi/4} \left( \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr \right) d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left( \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} r\,dr \right) d\theta$$



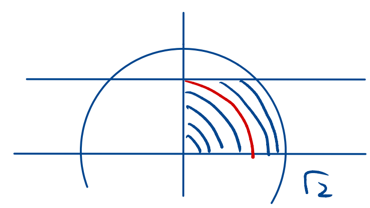

Usando las inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq r \cdot \sin\theta \leq 1 \\ \cos\theta \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \cos\theta \geq 0 \\ \sin\theta \geq 0 \end{array}\right] \to 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \left.\begin{array}{l} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ r \leq \frac{1}{\sin\theta} \end{array}\right] \longrightarrow 0 \leq r \leq \min\left\{ \sqrt{2}, \frac{1}{\sin\theta} \right\} \end{cases}$$

Punto de cambio: $\sqrt{2} = \frac{1}{\sin\theta} \to \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]}}{\longrightarrow} \theta = \frac{\pi}{4}$.

- <u>$r$-proyectable:</u>

$$A = \int_0^1 \left( \int_0^{\pi/2} r\,d\theta \right) dr + \int_1^{\sqrt{2}} \left( \int_0^{\arcsin\left(\frac{1}{r}\right)} r\,d\theta \right) dr.$$



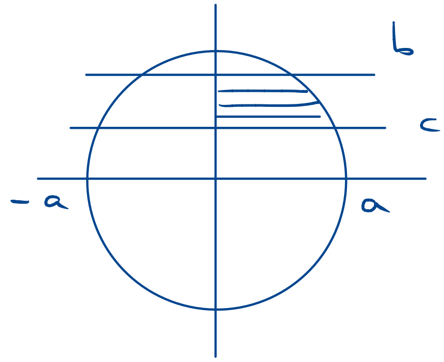

Usando las inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \sin\theta \leq \frac{1}{r} \\ \cos\theta \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ \longrightarrow 0 \leq \theta \leq \min\left\{ \frac{\pi}{2}, \arcsin\left(\frac{1}{r}\right) \right\}. \\ \underset{\substack{\uparrow \\ \left(\text{arccos}(\cdot)\text{ es decreciente}\right)}}{\longrightarrow} \theta \leq \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Punto de cambio: $\frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{1}{r}\right) \to \frac{1}{r} = 1 \to r = 1$.

$\boxed{27}$ $(a > b > c > 0)$

$$x^2+y^2+z^2 \le a^2, \quad z=b, \quad z=c$$




① Coord. cilíndricas:

$$\left.\begin{array}{l} r^2+z^2 \le a^2 \\ c \le z \le b \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ c \le z \le b \\ r^2+z^2 \le a^2 \to 0 \le r \le \sqrt{a^2-z^2} \end{array}$$

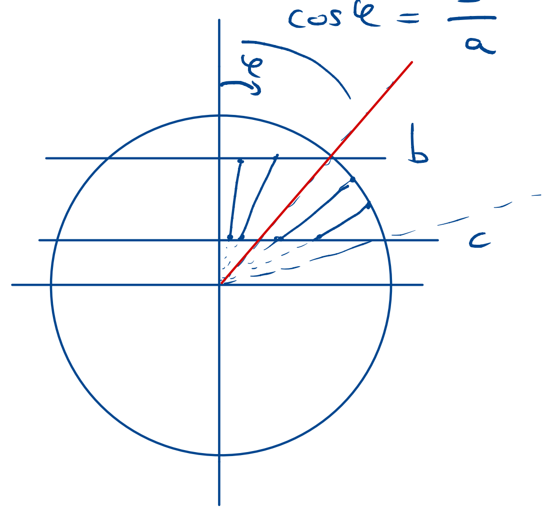
$$V = \int_0^{2\pi} \int_c^b \left( \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} r\,dr \right) dz\, d\theta = 2\pi \int_c^b \frac{1}{2}(a^2-z^2)\,dz =$$

$$= \pi\left( a^2(b-c) - \frac{1}{3}\left(b^3-c^3\right)\right).$$

② Coord. esféricas:

$$\left.\begin{array}{l} c \le r\cdot\cos\varphi \le b \\ 0 \le r \le a \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{array}\right\}$$

$$\cos\varphi = \frac{b}{a}$$




• Opción 1: $0 \le \theta \le 2\pi$,

$0 \le \varphi \le \arccos\left(\frac{c}{a}\right)$,

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le r \le a \\ \dfrac{c}{\cos\varphi} \le r \le \dfrac{b}{\cos\varphi} \end{array}\right\} \to \frac{c}{\cos\varphi} \le r \le \min\left\{a, \frac{b}{\cos\varphi}\right\}$$

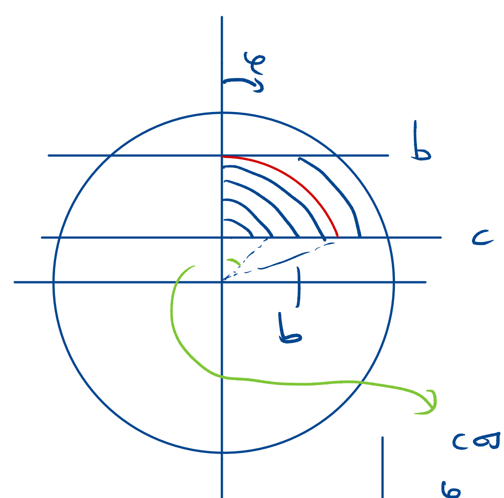
Cambio en $a = \frac{b}{\cos\varphi} \longrightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{b}{a}\right)$.

Así,

$$V = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\arccos\left(\frac{b}{a}\right)}\left(\int_{\frac{c}{\cos\varphi}}^{\frac{b}{\cos\varphi}} r\,dr\right)d\varphi\right)d\theta +$$

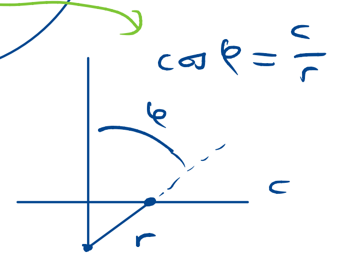
$$+\int_0^{2\pi}\left(\int_{\arccos\left(\frac{b}{a}\right)}^{\arccos\left(\frac{c}{a}\right)}\left(\int_{\frac{c}{\cos\varphi}}^{a} r\,dr\right)d\varphi\right)d\theta = \dots$$

• Opción 2: $0 \le \theta \le 2\pi$




$$\left.\begin{array}{l} c \le r\cdot\cos\varphi \le b \\ 0 \le r \le a \end{array}\right\}$$

$$\to r \ge \frac{c}{\cos\varphi} \underset{\substack{\uparrow \\ (0 \le \cos\varphi \le 1)}}{\ge} c \to c \le r \le a.$$




$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ c \le r \le a \\ \frac{c}{r} \le \cos\varphi \le \frac{b}{r} \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ (\cos\varphi \le 1)}}{\to} \min\left\{\overbrace{\arccos(1)}^{=0}, \arccos\left(\frac{b}{r}\right)\right\} \le \varphi \le \arccos\left(\frac{c}{r}\right).$$

Punto de cambio: $0 = \arccos\left(\frac{b}{r}\right) \to \frac{b}{r} = 1 \to r = b$.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_c^{b} \left( \int_0^{\arccos\left(\frac{c}{r}\right)} r^2 \sin\varphi \, d\varphi \right) dr \, d\theta \; +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_b^{a} \left( \int_{\arccos\left(\frac{b}{r}\right)}^{\arccos\left(\frac{c}{r}\right)} r^2 \sin\varphi \, d\varphi \right) dr \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_c^{b} r^2 \left( -\frac{c}{r} + 1 \right) dr + 2\pi \int_b^{a} r^2 \left( -\frac{c}{r} + \frac{b}{r} \right) dr =$$

$$= 2\pi \left[ -c\left( \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} \right) + \frac{b^3 - c^3}{3} \right] + 2\pi \left[ -c\left( \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) + b\left( \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) \right] =$$

$$= \pi \left( -cb^2 + c^3 + \frac{2}{3}b^3 - \frac{2}{3}c^3 + (b-c)(a^2 - b^2) \right) =$$

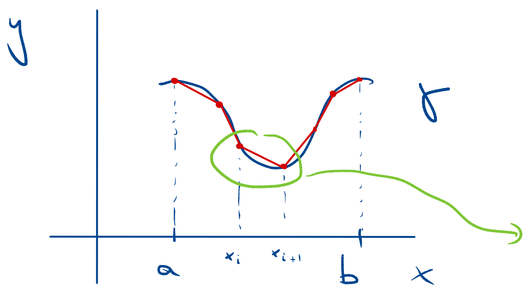
$$= \pi \left( a^2(b-c) - \cancel{c}b^2 + \frac{c^3}{3} + \frac{2}{3}b^3 - b^3 + \cancel{c}b^2 \right) =$$

$$= \pi \left( a^2(b-c) - \frac{1}{3}(b^3 - c^3) \right) //$$

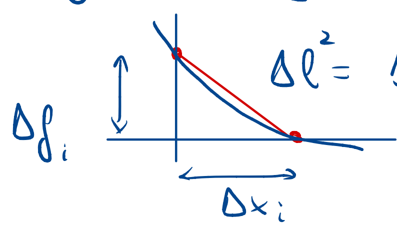
## Clase 36: Integrales de línea

- En este tema queremos generalizar la idea de integral de Riemann sobre un intervalo a curvas.
- Por ejemplo,

¿cómo calcular la longitud de la curva $\gamma$?




Idea: aproximar por segmentos pequeños.




$$\Delta l^2 = \Delta f_i^2 + \Delta x_i^2$$

$$L_n \simeq \sum_{i=1}^{n} |\Delta l| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta f_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow L = \lim_{n\to+\infty} L_n = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)}\, dx .$$

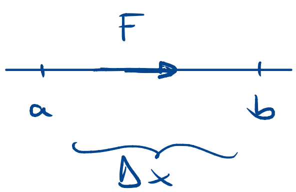
<u>Nota</u>: En este caso, la curva $\gamma$ está parametrizada como el grafo de una función,

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\} \rightsquigarrow \gamma(t) = (t, f(t)) \rightsquigarrow$$

vector tangente $\rightsquigarrow$ $\gamma'(t) = (1, f'(t)) \longrightarrow |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$ "$\sim dl$"

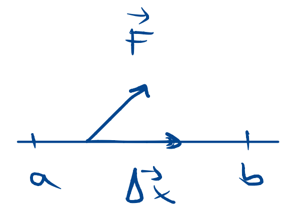
"Veamos que $L = \int_\gamma dl = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$".

- Otro caso conocido es el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto que se mueve en línea recta en el sentido de la fuerza:

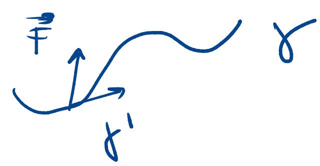



$$W = F\,\Delta x$$

Si $\vec{F}$ tiene otra dirección, $W = \vec{F}\cdot\vec{\Delta x}$ ,




En general, querremos calcular el trabajo en otras trayectorias




$$\text{“}\, W = \int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{\gamma}'\, d\ell \,\text{”}$$

( ← aún por definir )

- Para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, la herramienta principal para calcular sus integrales definidas era hacer uso de una primitiva.

Resultaba fundamental entonces el hecho siguiente: Dada una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, el T$^{ma}$ Fundamental del cálculo garantiza que existe una primitiva de $f$, es decir,

$$\exists\, g:[a,b]\to\mathbb{R} \;/\; g'(t) = f(t).$$

Como corolario, la regla de Barrow nos permite calcular la integral de $f$ en ese camino:

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(a) - g(b).$$

<u>Nota!</u>: Para calcular $\int_a^b f(t)dt$, solo necesitamos conocer el valor de $g$ en los extremos del intervalo.

En el ejemplo anterior,  $\gamma$

"$W = \int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{\gamma}'\,dl$" $\rightsquigarrow$ ¿bastará con conocer una "primitiva" de $\vec{F}$ en los extremos de la curva?

Dada $\vec{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, podríamos llamar "primitiva" de $\vec{F}$ a una función $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ / $\vec{F} = \nabla g$.

¿Si $\vec{F}$ continua, tendrá siempre "primitiva", como ocurre en $\mathbb{R}$?

→ En general, la respuesta es no.

→ Es importante saber cuándo es sí.

## • Curvas rectificables

• **Def:** Se llama curva o camino en $\mathbb{R}^n$ al conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ definido como imagen de un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ por una función continua,

$$\left.\begin{array}{l} \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \\ \quad t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{array}\right\} \quad C = \gamma([a,b]).$$

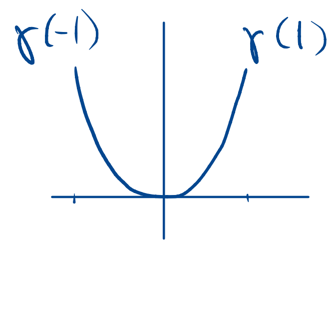
A la función $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ se le llama parametrización de la curva $C$.

Nota: 1) Una curva puede parametrizarse de distintas formas.

2) Abusando de lenguaje, muchas veces se dice "la curva $\gamma(t)$".

**Ejemplos:**

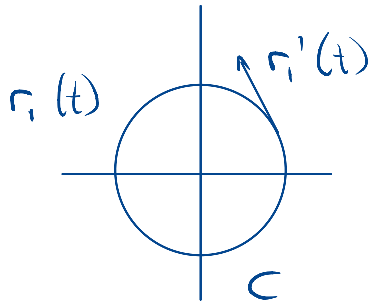
1) $$\left.\begin{array}{l} \gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto \gamma(t) = (t, t^2) \end{array}\right\}$$

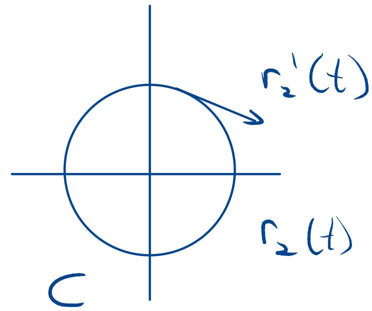



2) $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

Parametrizaciones: $$\left.\begin{array}{l} r_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto r_1(t) = (\cos(t), \sin(t)) \end{array}\right\}$$

$$r_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto r_2(t) = (\cos(t), -\sin(t))$$
} Recorro $C$ en sentido horario.



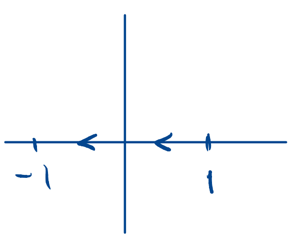




<u>Nota:</u> Si $\gamma$ es derivable, $\gamma'(t)$ es tangente a la curva en el punto $\gamma(t)$, y su sentido indica el sentido de recorrido de la curva.

3) $C = [-1, 1]$

$$r_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto r_1(t) = (-t, 0)$$

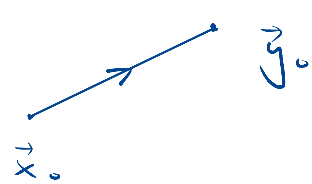
$$r_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto r_2(t) = (-2t+1, 0)$$




$r_1(t)$ "va más lento" que $r_2(t)$.

4) Segmento de $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

$$r : [0,1] \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto r(t) = (1-t)\vec{x}_0 + t\vec{y}_0$$

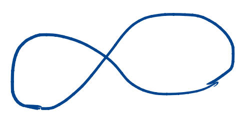


· **Def.:** Curva de Jordan

Sea una curva parametrizada $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

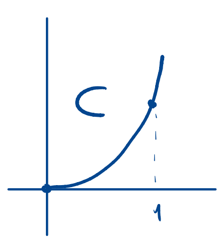
1) Se llama origen y extremo de la curva a los puntos $r(a), r(b) \in \mathbb{R}^n$, resp.
   Si $r(a) = r(b)$, la curva se dice cerrada.

2) Si $r(t)$ es inyectiva, la curva se dice simple.
   Nota: Si $r$ es cerrada, se dice simple si $r$ es inyectiva en $[a,b)$.

   Ej.:  No es simple

3) Si $r \in C^1([a,b])$ y $r'(t) \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ $\forall t \in [a,b]$, la curva se dice regular.

   Ej.: $r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$
   $t \longmapsto r(t) = (t^2, t^4)$ $\Big\}$ $r'(0) = (0,0) \Rightarrow$ No es regular




Nota: La curva C admite otras parametrizaciones que sí son curvas regulares.

→ Se dice regular a trozos si existe partición de $[a,b]$ de forma que es regular en cada trozo de la part.

4) Se dice que es curva de Jordan si es simple, cerrada y regular a trozos.

• **Def.:** Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ una curva. Se dice que

$$r_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \quad r_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n,$$

son (parametrizaciones) equivalentes si existe

$$\exists\, \varphi : [a,b] \to [c,d] \;/\; r_1(t) = (r_2 \circ \varphi)(t) = r_2(\varphi(t))$$

$$\underbrace{\begin{array}{l} \varphi \in C^1([a,b]) \\ \varphi'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b] \end{array}}$$

( difeomorfismo de clase $C^1$ )

• **Nota:** Si $r_1, r_2$ son equivalentes, entonces

$$r_1'(t) = r_2'(\varphi(t))\,\varphi'(t) \quad \forall t \in [a,b].$$

Como $\varphi'$ continua en $[a,b]$, $\varphi'(t) \neq 0$ en $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\varphi'(t)$ no cambia de signo en $[a,b]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $r_1'$ y $r_2'$ tienen la misma dirección.

Se dice que:

→ Si tienen el mismo sentido ($\varphi'(t) > 0$), misma orientación.

→ Si sentido opuesto ($\varphi'(t) < 0$), orientación contraria.

• **Def.:** Integral de línea.

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $C = \gamma([a,b])$ una curva regular, y $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar.

Se llama integral de línea de $f$ en $C$, y se denota por

$$\int_C f \, d\ell ,$$

a la integral de Riemann

$$\boxed{\int_C f \, d\ell = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt}$$

**Nota:** Si la curva es cerrada, se suele denotar $\oint_C f \, d\ell$.

**Nota:** Si la curva es regular a trozos,

$C = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$, con $C_i$ regular, $\int_C f \, d\ell = \sum_{i=1}^{m} \int_{C_i} f \, d\ell$.

→ **Nota:** "El valor $\int_C f \, d\ell$ no depende de la parametrización de la curva $C$."

esto es, si $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ son parametrizaciones equivalentes, con

$\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$, ($\varphi : [a,b] \to [c,d]$ difeom. de clase $C^1$),

entonces vemos que

$$\int_a^b f(\gamma_1(t)) \|\gamma_1'(t)\| dt = \int_a^b f(\gamma_2(\varphi(t))) \| \gamma_2'(\varphi(t))\varphi'(t) \| dt =$$

$$= \int_a^b f(\gamma_2(\varphi(t))) \|\gamma_2'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt = \left\{ \begin{array}{l} s = \varphi(t) \\ ds = \varphi'(t) dt \end{array} \right.$$

$$= \int_c^d f(\gamma_2(s)) \|\gamma_2'(s)\| ds .$$

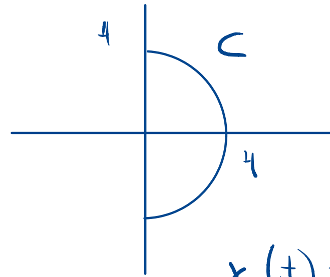
$$\left\| \int_C f \, dl \text{ es independiente de parametrizaciones equivalentes} \right\|$$

- Ejemplo: Calcular $\int_C x y^4 \, dl$, donde

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16 , x \geq 0 \}$.

Sol:

Parametrizamos $C$:




$x = 4\cos(t)$,

$y = 4\sin(t)$,

$t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'(t) + y'(t)} = 4.$

Denotamos $f(x,y) = x\,y^4$.

Entonces,

$$\int_C f\, dl = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4^5 \cos(t) \sin^4(t) \cdot 4\, dt = 4^6 \left[ \frac{\sin^5(t)}{5} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2 \cdot 4^6}{5}.$$

→ Nota: Para $f \equiv 1$, obtenemos la longitud de la curva $C$,

$$\int_C dl = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \quad \text{, con } \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

parametrización regular.

Ej: Masa de un alambre descrito por la curva $C$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, con densidad lineal $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

<u>Sol:</u> $M = \int_C dm = \int_C \rho \, d\ell = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$

$dm = \rho \, d\ell$